数 学 学 报

ACTA MATHEMATICA SINICA

第 9 卷　　第 4 期

Vol. 9　　No. 4

1959

中 国 数 学 会 編 輯

科 学 出 版 社 出 版

数 学 学 报

第 9 卷 第 4 期

目 录



ACTA MATHEMATICA SINICA Vol. 9, No. 4

CONTENTS

第9卷 第4期 数学学报 Vol. 9, No. 4
1959 年 12 月 ACTA MATHEMATICA SINICA Dec., 1959

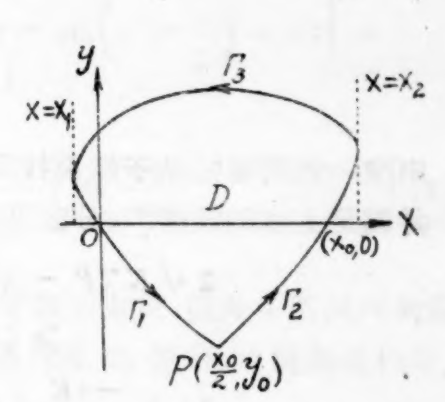
查甫雷金方程的唯一性定理(III)*

董光昌
(浙江大学)

考虑下列混合型方程的唯一性問題

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\left(K(0) = 0;\ 当\ y \neq 0\ 时,\ \frac{dK}{dy} > 0\right). \quad (1)$$



所考虑的区域由三条曲綫围成. 其一是双曲区域中由原点引出的特征綫 Γ_1, 它满足下面方程

$$dy = -\sqrt{-K}\,dx; \quad (2)$$

另一是双曲区域中在 Γ_1 右边的特征綫 Γ_2, 它满足下面方程

$$dy = \sqrt{-K}\,dx; \quad (3)$$

Γ_2 与 x 軸的交点記为 $(x_0, 0)$, Γ_1 与 Γ_2 的交点記为 $\left(\frac{x_0}{2}, y_0\right)$. 再一条曲綫是椭圓区域 $(y>0)$ 中由 $(x_0, 0)$ 起到原点止的連續分段可微曲綫 Γ_3.

我們的唯一性問題是,在什么条件下,(1)的解 u 适当正規[1)]且满足

$$u = 0 \quad (在\ \Gamma_2 + \Gamma_3\ 上) \quad (4)$$

时,則在 D 内 $u = 0$.

由于 Γ_2 是特征曲綫, 某些数学家把上面的唯一性(与存在性)問題叫做特里谷米問題.

設 a, b, c, p, q 都是 x, y 的函数, 在 D 内以及 D 的边界上 a, a_x, a_y, b, c, p, q 都連續且分区可微. 作者在前文[2)]中研究了由能量积分

$$-2\iint_D (au + bu_x + cu_y)(Ku_{xx} + u_{yy})\,dxdy = 0$$

与零积分

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(pu^2) + \frac{\partial}{\partial y}(qu^2)\right] dxdy + \oint u^2(qdx - pdy) + \int_{\Gamma_1} d(a\sqrt{-K}\,u^2) = 0$$

之和来討論唯一性問題,得出下列結論. 选取

$$a > 0 \quad (D), \quad (5)$$

$$b = c = 0 \quad (D_{上}), \quad (6)$$

* 1956 年 11 月 9 日收到.

1) u 适当正規,要使得某些积分存在,而且格林公式能够应用.

2) 見 [1].

$$b = \frac{4K\sqrt{-K}}{K_y}a, \quad c = \frac{4Ka}{K_y}\text{[1]} \quad (D_{下}), \tag{7}$$

$$p = \sqrt{-K}\,q \quad (D_{下}). \tag{8}$$

記 $\ln a = A$, $\frac{p}{a} = P$, $\frac{q}{a} = Q$, 在 $D_{下}$ 中并記

$$w = 1 + \frac{-4K}{K_y}(Q + A_x\sqrt{-K} - A_y), \tag{9}$$

$$1 + 2\left(\frac{K}{K_y}\right)_y = f(y), \tag{10}$$

則唯一性問題归結于能否找到 A, P, Q, w 滿足下列四式以及由此能否解出 a, b, c, p, q 并滿足上述的連續[2]与分区可微条件.

$$2\sqrt{K}(P - \sqrt{K}A_x)_x + 2(Q - A_y)_y \geqslant$$
$$\geqslant (P - \sqrt{K}A_x)^2 + (Q - A_y)^2 + KA_x^2 + A_y^2 \quad (D_{上}), \tag{11}$$

$$2f + \frac{-4K}{K_y}(A_x\sqrt{-K} - A_y) \geqslant 0 \quad (D_{下}), \tag{12}$$

$$-w\left[2f + \frac{-4K}{K_y}(A_x\sqrt{-K} + A_y)\right] +$$
$$+ \frac{(w - 1 + 2f)^2}{2f + \frac{-4K}{K_y}(A_x\sqrt{-K} - A_y)} \leqslant (\sqrt{-K}\,w_x + w_y)\frac{-4K}{K_y}\text{[3]} \quad (D_{下}), \tag{13}$$

$$w \geqslant 0 \quad (D_{下}). \tag{14}$$

記

$$\int_0^y \sqrt{-K}\,dy = Y \quad (D_{下}), \tag{15}$$

則 Γ_1 与 Γ_2 的方程化为 $x + Y = 0$ 与 $x_0 - x + Y = 0$, 又 Γ_1 与 Γ_2 交点的縱坐标 $y = y_0$ 对应于 $Y = -\frac{x_0}{2}$. 設

$$A(x, y) = B(x, y) + C(y) + m(y)\left(x - \frac{x_0}{2}\right) \quad (D_{下}). \tag{16}$$

---

1) 由 (5), (6), (7) 可見, 要使得 b, c 在 D 內連續, 必須假設当 $y = 0$ 时, $\frac{K}{K_y} = 0$. 以下的討論都假定这条件是成立的 (事实上这是一个輕微的限制, 只要假定 K 在 $y = 0$ 附近并不振动无限次, 則这条件可由 $K(0) = 0$ 与 $K'(0)$ 的存在性推出, 証明从略).

2) 上述連續条件可以減弱, 例如在区域 $D_{下}$ 中任何横綫 $y = y_1 < 0$ 上, a_y, p, q 可以不連續, 只要 a, a_x 与 w 連續就行了. 事实上, 在这种情况下, 在作者的文[1]中 (8) 式右端应該添加一項

$$\int\left[u^2(-a_y + q)\right]_{y=y_1+0}^{y=y_1-0} dx = \int\left\{u^2 a\left[(w-1)\frac{K_y}{-4K} - A_x\sqrt{-K}\right]\right\}_{y=y_1+0}^{y=y_1-0} dx = 0,$$

因此結論不受影响.

3) 当 $w - 1 + 2f$ 与(12)式左端都为零时, 这式当了解为

$$-w\left[2f + \frac{-4K}{K_y}(A_x\sqrt{-K} + A_y)\right] \leqslant (\sqrt{-K}\,w_x + w_y)\frac{-4K}{K_y}.$$

記

$$\min_{-Y\leqslant x\leqslant x_0+Y}(B_x - B_Y) = g(y),\quad \min_{-Y\leqslant x\leqslant x_0+Y}(B_x + B_Y) = h(y),\quad \frac{g+h}{2} = l(y),\tag{17}$$

并設 w 专是 y 的函数，則(12)与(13)成立的充分条件是

$$\frac{K_y f}{2(-K)^{3/2}} + g + m - m_Y\left(x - \frac{x_0}{2}\right) - C_Y \geqslant 0,\tag{18}$$

$$-2\left[\frac{K_y f}{2(-K)^{3/2}} + l + m\right] + \left\{\left[\frac{K_y f}{2(-K)^{3/2}} + g + m - m_Y\left(x - \frac{x_0}{2}\right) - C_Y\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\dfrac{1}{w}\left[\dfrac{K_y}{4(-K)^{3/2}}(w - 1 + 2f)\right]^2}{\dfrac{K_y f}{2(-K)^{3/2}} + g + m - m_Y\left(x - \dfrac{x_0}{2}\right) - C_Y}\right\} \leqslant \frac{w_Y}{w}.\tag{19}$$

应用(18)可見，(19)式左端花括弧內关于 x 的二阶偏导数不为負，因此花括弧內的最大值在两端 $x = -Y$ 或 $x = x_0 + Y$ 取到，最有利的情况是选择 C_Y 使得两端数值相等．暫記

$$\frac{K_y f}{2(-K)^{3/2}} + g + m - C_Y = \alpha,\quad \frac{1}{w}\left[\frac{K_y}{4(-K)^{3/2}}(w - 1 + 2f)\right]^2 = \beta,$$

$$\alpha + m_Y\left(\frac{x_0}{2} + y\right) = \xi,\quad \alpha - m_Y\left(\frac{x_0}{2} + Y\right) = \eta.$$

則(19)式左端花括弧內两端点的数值分別是 $\xi + \dfrac{\beta}{\xi}$，$\eta + \dfrac{\beta}{\eta}$，令其相等，即

$$\xi + \frac{\beta}{\xi} = \eta + \frac{\beta}{\eta}\ \text{或}\ (\xi - \eta)\left(1 - \frac{\beta}{\xi\eta}\right) = 0\ \text{或}\ \xi\eta = \beta,$$

即

$$\alpha^2 - m_Y^2\left(\frac{x_0}{2} + y\right)^2 = \beta,\qquad \alpha = \sqrt{m_Y^2\left(\frac{x_0}{2} + y\right)^2 + \beta}\ .$$

故应选取 C 使得下式成立

$$\frac{K_y f}{2(-K)^{3/2}} + g + m - C_Y = \sqrt{m_Y^2\left(\frac{x_0}{2} + Y\right)^2 + \frac{1}{w}\left[\frac{K_y}{4(-K)^{3/2}}(w - 1 + 2f)\right]^2}.\tag{20}$$

又 $\xi + \dfrac{\beta}{\xi} = \xi + \eta = 2\alpha$，因此得到(18)与(19)成立的充分条件是[1)]

$$\sqrt{m_Y^2\left(\frac{x_0}{2} + Y\right)^2 + \frac{1}{w}\left[\frac{K_y}{4(-K)^{3/2}}\left(w - 1 + 2f\right)\right]^2} -$$

$$-\left[\frac{K_y f}{2(-K)^{3/2}} + l + m\right] \leqslant \frac{w_Y}{2w}.\tag{21}$$

---

1) 还应該說明一下(18)式的成立．因 $\xi\eta = \beta$ 与 $\xi + \eta = 2\alpha$ 都为正，故 ξ, η 为正，而 $\alpha - m_y\left(x - \dfrac{x_0}{2}\right)$ 的数值在 ξ, η 之間，因此也为正，即(18)总是成立的．

在 $D_{上}$ 中，(11) 式右端是四个平方和．根据經驗，要利用它必須对区域 $D_{上}$ 的大小加以限制．查甫雷金方程与实际密切結合的情况是，区域 $D_{上}$ 在纵向不受限制或限制很輕微，而在横向的限制則較重．由于这种情况，我們令

$$A_y = Q = 0 \quad (D_{上}), \tag{22}$$

并記

$$\frac{P}{\sqrt{K}} - A_x = R, \tag{23}$$

則(11)化为

$$2R_x \geqslant R^2 + A_x^2. \tag{24}$$

下面叙述 A 与 R 的三种选法．假設区域 $D_{上}$ 被限制在两条纵綫 $x = x_1$ 与 $x = x_2$ 之間，則显然有 $x_1 \leqslant 0$, $x_2 \geqslant x_0$．設 ε 是任給的正数．

第一种选法．設 m_0 与 x_3 是待定常数，且 $m_0 \geqslant 0$．在 $D_{上}$ 中选

$$A = \int_{\frac{x_0}{2}}^{x} A_x\, dx, \tag{25}$$

其中

$$A_x = \begin{cases} 0 & (x_1 - \varepsilon \leqslant x \leqslant -\varepsilon) \\ m_0\left(1 + \dfrac{x}{\varepsilon}\right) & (-\varepsilon \leqslant x \leqslant 0) \\ m_0 & (0 \leqslant x \leqslant x_0) \\ m_0\left(1 - \dfrac{x - x_0}{\varepsilon}\right) & (x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \varepsilon) \\ 0 & (x_0 + \varepsilon \leqslant x \leqslant x_2 + \varepsilon) \end{cases} \tag{26}$$

选取

$$R = \begin{cases} \dfrac{2}{x_1 - \varepsilon - x} & (x_1 - \varepsilon \leqslant x \leqslant -\varepsilon) \\ m_0 \tan \dfrac{m_0}{2}(x - x_3) & (-\varepsilon \leqslant x \leqslant x_0 + \varepsilon) \\ \dfrac{2}{x_2 + \varepsilon - x} & (x_0 + \varepsilon \leqslant x \leqslant x_2 + \varepsilon) \end{cases} \tag{27}$$

要使 R 成为連續函数，常数 m_0 与 x_3 必須滿足下面諸式：

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{m_0}{2}(-\varepsilon - x_3) < \frac{m_0}{2}(x_0 + \varepsilon - x_3) < \frac{\pi}{2}, \tag{28}$$

$$\frac{2}{x_1} = m_0 \tan \frac{m_0}{2}(-\varepsilon - x_3), \quad \frac{2}{x_2 - x_0} = m_0 \tan \frac{m_0}{2}(x_0 + \varepsilon - x_3); \tag{29}$$

(29)改写为

$$\frac{m_0}{2}(x_3 + \varepsilon) = \operatorname{arc\,tan} \frac{2}{-m_0 x_1}, \quad \frac{m_0}{2}(x_0 + \varepsilon - x_3) = \operatorname{arc\,tan} \frac{2}{m_0(x_2 - x_0)}, \tag{30}$$

消去 x_3 得到

$$\frac{m_0}{2}(x_0 + 2\varepsilon) = \operatorname{arc\,tan} \frac{2}{-m_0 x_1} + \operatorname{arc\,tan} \frac{2}{m_0(x_2 - x_0)}. \tag{31}$$

上式左右端分别是 m_0 的增加函数与減少函数． 当 $m_0 = +0$ 时，左端数值小于右端；当 $m_0 = \frac{2\pi}{x_0 + 2\varepsilon} - 0$ 时，左端数值大于或等于右端． 因此在区間 $0 \leqslant m_0 \leqslant \frac{2\pi}{x_0 + 2\varepsilon}$ 中可解出唯一的 m_0，代入(30)得出 x_3，滿足(28)与(29)．

由上面选法可見，A, A_x, R 在 $D_上$ 中都連續，且(24)式滿足．

在 $D_上$ 的 $0 \leqslant x \leqslant x_0$ 部分內，由(25)与(26)得出 $A = m_0\left(x - \frac{x_0}{2}\right)$，把它写成象(16)式的样子，应該是

$$B(x,y) = 0, \tag{32}$$

$$C(y) = 0, \tag{33}$$

$$m(y) = m_0. \tag{34}$$

引 1. 在 $D_下$ 中如能找到連續且分段可微的函数 $m(y)$，$w(y)$[1] 滿足(14)与下列三式

$$m(0) = m_0, \tag{35}$$

$$当\ -\varepsilon \leqslant y \leqslant 0\ 时，\ w(y) = 1, \tag{36}$$

$$\sqrt{m_Y^2\left(\frac{x_0}{2} + Y\right)^2 + \frac{1}{w}\left[\frac{K_y}{4(-K)^{3/2}}(w - 1 + 2f)\right]^2} - \\ - \left[\frac{K_y f}{2(-K)^{3/2}} + m\right] \leqslant \frac{w_Y}{2w}, \tag{37}$$

則唯一性定理成立．

証． 在 $D_下$ 中选取

$$B(x,y) = 0, \tag{38}$$

則由(17)得

$$g = h = l = 0. \tag{39}$$

由(20)与(39)可見，当 $y_0 \leqslant y \leqslant 0$ 时，C_Y 为分段連續． 因 $C_y = C_Y\sqrt{-K}$，$m_y = m_Y\sqrt{-K}$，由这二式与(33)，(34)可見当 $y = 0$ 时，C_y, m_y 存在(其値为零)．由(16)，(20)，(25)，(26)，(32)，(33)，(34)，(38)可見 A 与 A_x 在 D 內及 D 的边界上为連續，A_y 为分区連續，A_y 可能有的不連續綫只是 $D_下$ 中的一些横綫． $a = e^A$ 的連續可微情况与 A 类似．在 $D_下$ 中可由(9)式解 Q，由(36)可見，当 $-\varepsilon \leqslant y \leqslant 0$ 时 $Q = A_y - A_x\sqrt{-K}$，由这式与(22)可見，Q 的不連續綫与 A_y 相同．由(8)与(23)可見，P 的不連續綫与 A_y 也相同． 由(6)，(7)及其附注可見 b, c 在 D 內及 D 的边界上为連續． 由366頁的注 2，可見 a, a_x, a_y, b, c, p, q 的連續与分区可微条件已經适合．

由(14)，(16)，(21)，(24)，(37)，(39)可見(11)—(14)成立，由此得到唯一性定理成立的結論．

---

1) 連續且分段可微指 $m(y)$ 与 $w(y)$ 当 $y_0 \leqslant y \leqslant 0$ 时为連續，而且它們的导数只有有限个不連續点，且在导数的不連續点处左右导数都存在．

第二种选法. 設 λ, m_1 是两个非負的待定常数. 在 $D_{上}$ 中按(25)式选 A, 其中

$$A_x = \begin{cases} 0 & (x_1 - \varepsilon \leqslant x \leqslant -\varepsilon) \\ \left(\frac{1}{\lambda + \varepsilon} + m_1\right)\left(1 + \frac{x}{\varepsilon}\right) & (-\varepsilon \leqslant x \leqslant 0) \\ \frac{1}{x + \lambda + \varepsilon} + m_1 & (0 \leqslant x \leqslant x_0) \\ \left(\frac{1}{x_0 + \lambda + \varepsilon} + m_1\right)\left(1 - \frac{x - x_0}{\varepsilon}\right) & (x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \varepsilon) \\ 0 & (x_0 + \varepsilon \leqslant x \leqslant x_2 + \varepsilon) \end{cases} \tag{40}$$

选取

$$R = \begin{cases} \frac{2}{x_1 - \varepsilon - x} & (x_1 - \varepsilon \leqslant x \leqslant -\varepsilon) \\ \frac{-1}{x + \lambda + \varepsilon} + m_1 \tan\left[\frac{m_1}{2}(x + \varepsilon) + \frac{\pi}{4}\right] & (-\varepsilon \leqslant x \leqslant x_0 + \varepsilon) \\ \frac{2}{x_2 + \varepsilon - x} & (x_0 + \varepsilon \leqslant x \leqslant x_2 + \varepsilon) \end{cases} \tag{41}$$

要使 R 成为連續函数,常数 m_1 与 λ 必須滿足下面諸式:

$$\frac{m_1}{2}(x_0 + 2\varepsilon) < \frac{\pi}{4}, \tag{42}$$

$$\frac{2}{x_1} = \frac{-1}{\lambda} + m_1, \quad \frac{2}{x_2 - x_0} = \frac{-2}{\lambda + x_0 + 2\varepsilon} + m_1 \tan\left[\frac{m_1}{2}(x_0 + 2\varepsilon) + \frac{\pi}{4}\right], \tag{43}$$

消去 λ 得到

$$\tan\left[\frac{m_1}{2}(x_0 + 2\varepsilon) + \frac{\pi}{4}\right] = \frac{2}{m_1(x_2 - x_0)} + \frac{2}{m_1\left(\frac{-x_1}{2 - m_1 x_1} + x_0 + 2\varepsilon\right)}. \tag{44}$$

上式左右端分别是 m_1 的增加与減少函数, 且当 $m_1 = +0$ 时, 左端数值小于右端; 当 $m_1 = \frac{\pi}{2(x_0 + 2\varepsilon)} - 0$ 时,左端数值大于或等于右端. 因此在区間 $0 \leqslant m_1 \leqslant \frac{\pi}{2(x_0 + 2\varepsilon)}$ 中可解出唯一的 m_1, 代入(43)得出 λ.

由上面选法可見,在 $D_{上}$ 中 A, A_x, R 都連續,且(24)式滿足.

在 $D_{上}$ 中的 $0 \leqslant x \leqslant x_0$ 部分內, 由(25)与(40)得出

$$A = \ln \frac{x + \lambda + \varepsilon}{\frac{1}{2}x_0 + \lambda + \varepsilon} + m_1\left(x - \frac{x_0}{2}\right).$$

把它写成象(16)式的样子,应該是(33)与下面二式:

$$B(x,y) = \ln(x + \lambda + \varepsilon) - \ln\left(\frac{x_0}{2} + \lambda + \varepsilon\right), \tag{45}$$

$$m(y) = m_1. \tag{46}$$

引 2. 在 $D_{下}$ 中如能找到連續且分段可微的函数 $m(y)$, $w(y)$ 滿足(14), (36)与下列

二式

$$m(0) = m_1, \tag{47}$$

$$\sqrt{m_Y^2\left(\frac{x_0}{2}+Y\right)^2+\frac{1}{w}\left[\frac{K_y}{4(-K)^{3/2}}(w-1+2f)\right]^2}-$$

$$-\left[\frac{1}{x_0+\lambda+2y+\varepsilon}+\frac{K_y f}{2(-K)^{3/2}}+m\right]\leqslant\frac{w_Y}{2w}, \tag{48}$$

则唯一性定理成立.

証. 在 $D_{下}$ 中选取

$$B(x,y)=\ln(x+\lambda+Y+\varepsilon)-\ln\left(\frac{x_0}{2}+\lambda+\varepsilon\right), \tag{49}$$

由(17)与(49)得到

$$g=0,\quad h=\frac{2}{x_0+\lambda+2Y+\varepsilon},\quad l=\frac{1}{x_0+\lambda+2Y+\varepsilon}. \tag{50}$$

由(45)与(49)可見 B, B_x, B_y 在 D 内及 D 的边界上为連續，其他核驗 a, a_x, a_y, b, c, p, q 的連續与分区可微情况与第一种选法时类似.

由 (14),(16),(21),(24),(48),(50) 可見(11)—(14) 成立，由此得到唯一性定理成立的結論.

第三种选法. 假設

$$|x_1+x_2-x_0|\leqslant 2x_0 \tag{51}$$

成立. 設 μ, ν, m_2 是三个非負的待定常数. 在 $D_{上}$ 中选

$$A=\int_{\frac{1}{2}(x_0+\nu-\mu)}^{x} A_x dx \tag{52}$$

其中

$$A_x=\begin{cases} 0 & (x_1-\varepsilon\leqslant x\leqslant-\varepsilon)\\ \left(\frac{1}{\mu+\varepsilon}+m_2\right)\left(1+\frac{x}{\varepsilon}\right) & (-\varepsilon\leqslant x\leqslant 0)\\ \frac{1}{x+\mu+\varepsilon}+m_2 & \left(0\leqslant x\leqslant\frac{x_0+\nu-\mu}{2}\right)^{1)}\\ \frac{1}{x_0+\nu+\varepsilon-x}+m_2 & \left(\frac{x_0+\nu-\mu}{2}\leqslant x\leqslant x_0\right)\\ \left(\frac{1}{\nu+\varepsilon}+m_2\right)\left(1-\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right) & (x_0\leqslant x\leqslant x_0+\varepsilon)\\ 0 & (x_0+\varepsilon\leqslant x\leqslant x_2+\varepsilon)\end{cases} \tag{53}$$

---

1) 由(51)式可得出 $0\leqslant\frac{x_0+\nu-\mu}{2}\leqslant x_0$, 見下面(59)式.

选取

$$
R=\begin{cases}\dfrac{2}{x_1-\varepsilon-x} & (x_1-\varepsilon\leqslant x\leqslant-\varepsilon)\\[2mm] \dfrac{-1}{x+\mu+\varepsilon}+m_2\tan\left[\dfrac{m_2}{2}(x+\varepsilon)+\dfrac{\pi}{4}\right] & \left(-\varepsilon\leqslant x\leqslant\dfrac{x_0+\nu-\mu}{2}\right)\\[2mm] \dfrac{1}{x_0+\nu+\varepsilon-x}-m_2\tan\left[\dfrac{m_2}{2}(x_0+\varepsilon-x)+\dfrac{\pi}{4}\right] & \left(\dfrac{x_0+\nu-\mu}{2}\leqslant x\leqslant x_0+\varepsilon\right)\\[2mm] \dfrac{2}{x_2+\varepsilon-x} & (x_0+\varepsilon\leqslant x\leqslant x_2+\varepsilon)\end{cases}\tag{54}
$$

要使 R 成为連續函数,常数 μ, ν, m_2 必須满足下面諸式:

$$
\frac{m_2}{4}(x_0+\mu-\nu+2\varepsilon)<\frac{\pi}{4},\quad \frac{m_2}{4}(x_0+\nu-\mu+2\varepsilon)<\frac{\pi}{4},\tag{55}
$$

$$
\frac{2}{x_1}=\frac{-1}{\mu}+m_2,\quad \frac{2}{x_2-x_0}=\frac{1}{\nu}-m_2,\tag{56}
$$

$$
m_2\tan\left[\frac{m_2}{4}(x_0+\mu-\nu+2\varepsilon)+\frac{\pi}{4}\right]+m_2\tan\left[\frac{m_2}{4}(x_0+\nu-\mu+2\varepsilon)+\frac{\pi}{4}\right]=
$$

$$
=\frac{4}{x_0+\mu+\nu+2\varepsilon}.\tag{57}
$$

由(56)得出

$$
\mu=\frac{-x_1}{2-m_2x_1},\qquad \nu=\frac{x_2-x_0}{2+m_2(x_2-x_0)}.\tag{58}
$$

应用(51)得到

$$
|\mu-\nu|=\frac{2|x_1+x_2-x_0|}{(2-m_2x_1)[2+m_2(x_2-x_0)]}\leqslant\frac{1}{2}|x_1+x_2-x_0|\leqslant x_0.\tag{59}
$$

由(57),(58)消去 μ, ν 得到

$$
\tan\left[\frac{m_2}{4}\left(x_0+\frac{-x_1}{2-m_2x_1}-\frac{x_2-x_0}{2+m_2(x_2-x_0)}+2\varepsilon\right)+\frac{\pi}{4}\right]+
$$

$$
+\tan\left[\frac{m_2}{4}\left(x_0+\frac{x_2-x_0}{2+m_2(x_2-x_0)}-\frac{-x_1}{2-m_2x_1}+2\varepsilon\right)+\frac{\pi}{4}\right]=
$$

$$
=\frac{4}{m_2\left[x_0+\dfrac{-x_1}{2-m_2x_1}+\dfrac{x_2-x_0}{2+m_2(x_2-x_0)}+2\varepsilon\right]}.\tag{60}
$$

(60)式左端两項都是 m_2 的增加函数,这是因为对 m_2 的导数等于 $\frac{1}{4}\sec^2[\quad]$ 与下式的乘

积

$$x_0 \pm \left\{\frac{-2x_1}{(2-m_2x_1)^2} - \frac{2(x_2-x_0)}{[2+m_2(x_2-x_0)]^2}\right\} =$$

$$= x_0 \pm \left[\frac{-x_1}{2-m_2x_1} - \frac{x_2-x_0}{2+m_2(x_2-x_0)}\right]\frac{4-m_2^2x_1(x_2-x_0)}{(2-m_2x_1)[2+m_2(x_2-x_0)]} \geqslant$$

$$\geqslant x_0 - \left|\frac{-x_1}{2-m_2x_1} - \frac{x_2-x_0}{2+m_2(x_2-x_0)}\right| = x_0 - |\mu - v| \geqslant 0,$$

上面最后二式的成立是应用了(58)与(59).

易知(60)右端是 m_2 的减少函数. 当 $m_2 = +0$ 时,(60)式左端数值小于右端;当 m_2 满足 $\frac{m_2}{4}(x_0 + |\mu - v| + 2\varepsilon) = \frac{\pi}{4} - 0$ 时[1), (60)式左端数值大于右端. 因此(60)有满足(55)的唯一解 m_2. 代入(58)得出 μ, v.

由上面选法可見,在 $D_{上}$ 中 A, A_x, R 都連續,且(24)式滿足.

在 $D_{上}$ 中的 $0 \leqslant x \leqslant x_0$ 部分內,由(52)与(53)得出

$$A = \begin{cases} \ln \dfrac{x+\mu+\varepsilon}{\frac{1}{2}(x_0+\mu+v)+\varepsilon} + m_2\left(x - \dfrac{x_0+v-\mu}{2}\right), & \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{x_0+v-\mu}{2}\right) \\ \ln \dfrac{\frac{1}{2}(x_0+\mu+v)+\varepsilon}{x_0+v+\varepsilon-x} + m_2\left(x - \dfrac{x_0+v-\mu}{2}\right), & \left(\dfrac{x_0+v-\mu}{2} \leqslant x \leqslant x_0\right). \end{cases}$$

把它写成象(16)式的样子,应該是(33)与下面二式:

$$B(x,y) = \begin{cases} \ln \dfrac{x+\mu+\varepsilon}{\frac{1}{2}(x_0+\mu+v)+\varepsilon} + \dfrac{m_2}{2}(\mu - v), & \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{x_0+v-\mu}{2}\right) \\ \ln \dfrac{\frac{1}{2}(x_0+\mu+v)+\varepsilon}{x_0+v+\varepsilon-x} + \dfrac{m_2}{2}(\mu - v), & \left(\dfrac{x_0+v-\mu}{2} \leqslant x \leqslant x_0\right), \end{cases} \tag{61}$$

$$m(y) = m_2. \tag{62}$$

引 3. 在 $D_{下}$ 中如能找到連續且分段可微的函数 $m(y)$, $w(y)$ 滿足(14),(36)与下列二式:

$$m(0) = m_2 \tag{63}$$

$$\sqrt{m_Y^2\left(\frac{x_0}{2}+Y\right)^2 + \frac{1}{w}\left[\frac{K_y}{4(-K)^{3/2}}(w-1+2f)\right]^2} - \left[e(Y) + \frac{K_yf}{2(-K)^{3/2}} + m\right] \leqslant \frac{w_Y}{2w}, \tag{64}$$

---

1) 因上面已証明过 $\frac{m_2}{4}(x_0 + |\mu - v| + 2\varepsilon)$ 是 m_2 的增加函数,又显然它 $\geqslant \frac{m_2}{4}(x_0 + 2\varepsilon)$, 故存在唯一的正数 m_2 满足 $\frac{m_2}{4}(x_0 + |\mu - v| + 2\varepsilon) = \frac{\pi}{4} - 0$.

其中

$$e(Y)=\begin{cases}\dfrac{2}{x_0+\mu+\nu+2Y+2\varepsilon} & (Y\geqslant 1/2(|\mu-\nu|-x_0))\\ \dfrac{2}{2x_0+\mu+\nu-|\mu-\nu|+4Y+2\varepsilon} & (Y<1/2(|\mu-\nu|-x_0)),\end{cases}\tag{65}$$

则唯一性定理成立.

証. 在 $D_{下}$ 中选取

$$B(x,y)=\begin{cases}\ln\dfrac{x+\mu+Y+\varepsilon}{\frac{1}{2}(x_0+\mu+\nu)+Y+\varepsilon}+\dfrac{m_2}{2}(\mu-\nu) & \left(x\leqslant\dfrac{x_0+\nu-\mu}{2}\right)\\ \ln\dfrac{\frac{1}{2}(x_0+\mu+\nu)+Y+\varepsilon}{x_0+\nu+\varepsilon+Y-x}+\dfrac{m_2}{2}(\mu-\nu) & \left(x\geqslant\dfrac{x_0+\nu-\mu}{2}\right),\end{cases}\tag{66}$$

由(17)与(66)得到

$$\left.\begin{aligned}&当\ Y\geqslant\frac{1}{2}(|\mu-\nu|-x_0)\ 时,\quad g=h=l=\frac{2}{x_0+\mu+\nu+2Y+2\varepsilon},\\ &当\ Y<\frac{1}{2}(|\mu-\nu|-x_0)\ 时,\\ &\quad g=\frac{2}{x_0+\mu+2Y+\varepsilon}-\frac{1}{\frac{1}{2}(x_0+\mu+\nu)+Y+\varepsilon},\\ &\quad h=\frac{1}{\frac{1}{2}(x_0+\mu+\nu)+Y+\varepsilon},\ l=\frac{1}{x_0+\mu+2Y+\varepsilon}\quad(\mu\leqslant\nu),\\ &\quad g=\frac{1}{\frac{1}{2}(x_0+\mu+\nu)+Y+\varepsilon},\ h=\frac{2}{x_0+\nu+2Y+\varepsilon}-\\ &\qquad-\frac{1}{\frac{1}{2}(x_0+\mu+\nu)+Y+\varepsilon},\ l=\frac{1}{x_0+\nu+2Y+\varepsilon}\quad(\mu>\nu).\end{aligned}\right\}\tag{67}$$

由(61)与(66)可見 B, B_x, B_y 在 D 内及 D 的边界上为連續. 其他核驗 a, a_x, a_y, b, c, p, q 的連續与分区可微情况与第一种选法时类似.

由(14),(16),(21),(24),(64),(67)可見(14)—(14)成立,因此得到唯一性定理成立的結論.

大致說来, 当 $-x_1$ 与 x_2-x_0 都比較大时用第一种选法比較好; 当 $-x_1$ 比較小而 x_2-x_0 比較大时用第二种选法比較好;当 $-x_1$ 与 x_2-x_0 都比較小时用第三种选法比較好.

綜合引 1, 引 2, 引 3 并略加改变,得到下列結果.

引 4. 設 $j_n\ (n=0,1,2)$ 是下面三式的最小正根:

$$\frac{j_0}{2} = \arc\tan\frac{2x_0}{-j_0x_1} + \arc\tan\frac{2x_0}{j_0(x_2-x_0)}, \tag{68}$$

$$\tan\left(\frac{j_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2x_0}{j_1(x_2-x_0)} + \frac{2(x_0-j_1x_1)}{j_1(x_0-x_1-j_1x_1)}, \tag{69}$$

$$\tan\left[\frac{j_2}{4}\left(1+\frac{-x_1}{2x_0-j_2x_1}-\frac{x_2-x_0}{2x_0+j_2(x_2-x_0)}\right)+\frac{\pi}{4}\right]+$$

$$+\tan\left[\frac{j_2}{4}\left(1-\frac{-x_1}{2x_0-j_1x_1}+\frac{x_2-x_0}{2x_0+j_2(x_2-x_0)}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=$$

$$=\frac{4}{j_2\left[1+\frac{-x_1}{2x_0-j_2x_1}+\frac{x_2-x_0}{2x_0+j_2(x_2-x_0)}\right]}^{1)}. \tag{70}$$

設 $X_n\,(n=0,1,2)$ 由下面三式定出：

$$X_0 = x_0, \tag{71}$$

$$X_1 = x_0\left(1+\frac{-x_1}{2x_0-j_1x_1}\right), \tag{72}$$

$$X_2 = x_0\left[1+\frac{-x_1}{2x_0-j_2x_1}+\frac{x_2-x_0}{2x_0+j_2(x_2-x_0)}\right]+$$

$$+\ \delta\left[x_0+2Y-\left|\frac{-x_0x_1}{2x_0-j_2x_1}-\frac{x_0(x_2-x_0)}{2x_0+j_2(x_2-x_0)}\right|\right], \tag{73}$$

其中当 $x_0+2y-\left|\frac{-x_0x_1}{2x_0-j_2x_1}-\frac{x_0(x_2-x_0)}{2x_0+j_2(x_2-x_0)}\right| \geqslant 0$ 或 <0 时，$\delta=0$ 或 1.

在区間 $y_0 \leqslant y \leqslant 0$ 中，如能找到連續且分段可微的函数 $m(y)$，$w(y)$ 满足 (14)，(36) 与下列二式：

$$m(0) = \frac{j_n}{x_0}, \tag{74}$$

$$\sqrt{m_Y^2\left(\frac{x_0}{2}+Y\right)^2+\frac{1}{w}\left[\frac{K_y}{4(-K)^{3/2}}(w-1+2f)\right]^2} -$$

$$-\left[\frac{n}{X_n+nY+\varepsilon}+\frac{K_yf}{2(-K)^{3/2}}+m\right] \leqslant \frac{w_Y}{2w}, \tag{75}$$

則唯一性定理成立.

証. 以 $n=1$ 的情况为例，$n=0,2$ 的情况可以同样考虑.

由于在引 2 中 $m_1=m_1(\varepsilon)$ 与 $\lambda=\lambda(\varepsilon)$ 都是 ε 的連續函数，故当由(69)，(72)解出的 j_1（这是引 2 中 $\varepsilon=0$ 时求出的 m_1x_0）与 X_1 满足 (74)，(75)时，必能找到充分小的正数 ε（这个 ε 可以与(75)式中的 ε 不同）使 $m_1(\varepsilon)$，$\lambda(\varepsilon)$ 满足 (42)，(43)，(47)，(48). 故由引 2 得到，唯一性定理是成立的. 引 4 証毕.

引 4 中尚存有两个未知函数 m 与 w，很不方便，需要进一步簡化.

---

1) 定出 j_2 时，要在(51)式成立的限制之下.

(75) 成立的充分条件是

$$|m_Y|\left(\frac{x_0}{2}+Y\right)+\frac{K_y}{4(-K)^{3/2}}\frac{|w-1+2f|}{\sqrt{w}}-$$
$$-\left[\frac{n}{X_n+nY+\varepsilon}+\frac{K_yf}{2(-K)^{3/2}}+m\right]\leqslant\frac{w_Y}{2w}. \tag{76}$$

考虑到(76)式，按(74)与下列二式来选取 m 比較合适：

$$m_Y\leqslant 0, \tag{77}$$

$$m-|m_Y|\left(\frac{x_0+\varepsilon}{2}+Y\right)=-\left[\frac{n}{X_n+nY+\varepsilon}+\frac{K_yf}{2(-K)^{3/2}}-\right.$$
$$\left.-\frac{K_y}{4(-K)^{3/2}}\frac{|w-1+2f|}{\sqrt{w}}+\frac{w_Y}{2w}\right], \tag{78}$$

即

$$m=\frac{1}{x_0+2Y+\varepsilon}\left\{j_n\left(1+\frac{\varepsilon}{x_0}\right)+2\int_Y^0\left[\frac{n}{X_n+nY+\varepsilon}+\frac{K_yf}{2(-K)^{3/2}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{K_y}{4(-K)^{3/2}}\frac{|w-1+2f|}{\sqrt{w}}+\frac{w_Y}{2w}\right]dY\right\}. \tag{79}$$

由(78)与(79)可見，(77)成立的充分条件是

$$(x_0+2Y+\varepsilon)\left[\frac{n}{X_n+nY+\varepsilon}+\frac{K_yf}{2(-K)^{3/2}}-\frac{K_y}{4(-K)^{3/2}}\frac{|w-1+2f|}{\sqrt{w}}+\frac{w_Y}{2w}\right]+$$
$$+2\int_Y^0\left[\frac{n}{X_n+nY+\varepsilon}+\frac{K_yf}{2(-K)^{3/2}}-\frac{K_y}{4(-K)^{3/2}}\frac{|w-1+2f|}{\sqrt{w}}+\frac{w_Y}{2w}\right]dY+j_n\geqslant 0. \tag{80}$$

当(80)成立时，按(79)式选取的 m 必然满足(76)，故得下列引理.

引 5. 在区間 $y_0\leqslant y\leqslant 0$ 中，如能找到連續且分段可微的函数 $w(y)$ 满足(36)与(80)[1] 时，則唯一性定理成立.

所有上面的討論，对于 $f(y)$（它的定义見(10)式）只有輕微的限制，即只要假設 f 在 $y_0\leqslant y\leqslant 0$ 中是連續甚至是分段連續就够了.

今假設 f 在 $y_0\leqslant y\leqslant 0$ 为連續且分段可微，而且在一些地方取到負値. 滿足 $f(y)<0$ 的 y 的上界記为 y_1，假設 $y_0<y_1<0$. 选取

$$w=\begin{cases}1 & (y_1\leqslant y\leqslant 0)\\ 1-2f & (y_0\leqslant y\leqslant y_1),\end{cases} \tag{81}$$

則(36)式满足，又(80)式当 $y_1<y\leqslant 0$ 时显然成立. 故由引 5 得到下面的

定理. 如果当 $y_0\leqslant y\leqslant y_1$ 时，

$$(x_0+2Y+\varepsilon)\left[\frac{n}{X_n+ny+\varepsilon}+\frac{K_yf}{2(-K)^{3/2}}-\frac{f_Y}{1-2f}\right]+$$
$$+\int_Y^0\frac{2n\,dY}{X_n+nY+\varepsilon}+2\int_Y^{Y(y_1)}\left[\frac{K_yf}{2(-K)^{3/2}}-\frac{f_Y}{1-2f}\right]dY+j_n\geqslant 0 \tag{82}$$

1) 因 (80) 式中含有 $\sqrt{w}$，故 (14) 式自然成立，不必另外敍述.

滿足，則唯一性定理成立.

空气动力学上的例子[1]. 設 β 是一个正常数且 $\beta \approx 2.5$.

$$K(y) = \frac{1-(2\beta+1)t}{(1-t)^{2\beta+1}}, \quad y = -\int_{\frac{1}{2\beta+1}}^{t} \frac{(1-t)^{\beta}}{2t}\,dt, \tag{83}$$

$$K_y = \frac{4\beta(2\beta+1)t^2}{(1-t)^{3\beta+2}}, \qquad f = 1 + 2\left(\frac{K}{K_y}\right)_y = \frac{2-(\beta+2)t}{\beta(2\beta+1)t^2}.$$

則 $t = \frac{1}{2\beta+1}$ 对应于 $y = 0$，$\frac{1}{2\beta+1} \leqslant t \leqslant 1$ 对应于 y 的負值，$t = \frac{2}{\beta+2}$ 对应于 $y = y_1$. 又

$$\frac{-K_y f}{2(-K)^{3/2}} = \frac{2[(\beta+2)t-2]}{\sqrt{1-t}\,[(2\beta+1)t-1]^{3/2}},$$

$$\frac{f_Y}{1-2f} = \frac{f_y}{\sqrt{-K}(1-2f)} = \frac{\sqrt{1-t}\,[4-(\beta+2)t]}{\sqrt{(2\beta+1)t-1}\,[\beta(2\beta+1)t^2+2(\beta+2)t-4]},$$

$$Y = \int_0^y \sqrt{-K}\,dy = -\int_{\frac{1}{2\beta+1}}^{t} \frac{\sqrt{(2\beta+1)t-1}}{\sqrt{1-t}}\frac{dt}{2t} =$$

$$= -\sqrt{2\beta+1}\,\arctan\sqrt{\frac{t-\frac{1}{2\beta+1}}{1-t}} + \arctan\sqrt{\frac{(2\beta+1)t-1}{1-t}}.$$

当 $t = 1$ 时 K 成为不連續，故 $t = 1$ 时对应的 x_0 是不可能的，它的数值（記为 $\bar{x}_0$）是一切可能的 x_0 的上界.

$$\bar{x}_0 = -2Y|_{t=1} = (\sqrt{2\beta+1}-1)\pi,$$

$$\bar{x}_0 + 2Y = \int_t^1 \frac{\sqrt{(2\beta+1)t-1}}{\sqrt{1-t}}\frac{dt}{t} = 2\sqrt{2\beta+1}\,\arctan\sqrt{\frac{1-t}{t-\frac{1}{2\beta+1}}} -$$

$$-2\arctan\sqrt{\frac{1-t}{(2\beta+1)t-1}}.$$

空气动力学上經常遇見的情况是 $D_{上}$ 区域被限制在 $0 \leqslant x \leqslant x_0$ 中，即 $x_1 = 0$，$x_2 = x_0$. 这时应該应用定理中 $n = 2$ 的情形. 由(70)得到，j_2 是滿足下式的最小正根

$$\tan\left(\frac{j_2}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{j_2},$$

即

$$j_2 = 1.112. \tag{84}$$

1) 参考 [2].

由(73)得出 $X_2 = x_0$. 因此(82)化为

$$\left[\frac{-K_y f}{2(-K)^{3/2}} + \frac{f_Y}{1-2f}\right](x_0+\varepsilon+2Y) + \ln\frac{K_y^2(1-2f)(x_0+\varepsilon+2Y)^2}{(-K)^3} \leqslant$$

$$\leqslant 2 + j_2 + \ln\frac{(x_0+\varepsilon)^2 K_y^2(y_1)}{-K^3(y_1)}.$$

选取 $\varepsilon = \bar{x}_0 - x_0$ 并以(83)式等代入上式得到

$$\left\{\frac{2[(\beta+2)t-2]}{\sqrt{1-t}\,[(2\beta+1)t-1]^{3/2}} + \frac{\sqrt{1-t}\,[4-(\beta+2)t]}{\sqrt{(2\beta+1)t-1}\,[\beta(2\beta+1)t^2+2(\beta+2)t-4]}\right\}\cdot$$

$$\cdot\left[\sqrt{2\beta+1}\,\mathrm{arc\,tan}\sqrt{\frac{1-t}{t-\frac{1}{2\beta+1}}} - \mathrm{arc\,tan}\sqrt{\frac{1-t}{(2\beta+1)t-1}}\right] +$$

$$+\ln\left\{\frac{8\sqrt{\beta(2\beta+1)}\,t}{\sqrt{1-t}\,[(2\beta+1)t-1]^{3/2}}\sqrt{\beta(2\beta+1)t^2+2(\beta+2)t-4}\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[\sqrt{2\beta+1}\,\mathrm{arc\,tan}\sqrt{\frac{1-t}{t-\frac{1}{2\beta+1}}} - \mathrm{arc\,tan}\sqrt{\frac{1-t}{(2\beta+1)t-1}}\right]\right\} <$$

$$< 1 + \frac{j_2}{2} + \ln\left[(\sqrt{2\beta+1}-1)\pi\cdot\frac{16(2\beta+1)}{3\sqrt{3}\,\beta}\right]. \tag{85}$$

作替换

$$\frac{1-t}{(2\beta+1)t-1} = u, \tag{86}$$

则(85)化为

$$\frac{1}{2\beta}\left\{(1-3u)[1+(2\beta+1)u] + \frac{2u[(2-\beta)+(7\beta+2)u][1+(2\beta+1)u]}{(2\beta+3)+2(4\beta-1)u-5(2\beta+1)u^2}\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{2\beta+1}\,\mathrm{arc\,tan}\sqrt{(2\beta+1)u} - \mathrm{arc\,tan}\sqrt{u}}{\sqrt{u}} +$$

$$+\ln\left[(1+u)\sqrt{(2\beta+3)+2(4\beta-1)u-5(2\beta+1)u^2}\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\sqrt{2\beta+1}\,\mathrm{arc\,tan}\sqrt{(2\beta+1)u} - \mathrm{arc\,tan}\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\right] \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{j_2}{2} + \ln\left[(\sqrt{2\beta+1}-1)\pi\cdot\frac{8}{3\sqrt{3}}\sqrt{2\beta+1}\right]. \tag{87}$$

以(84)代入(87)，并令 $\beta = 2.5$，得

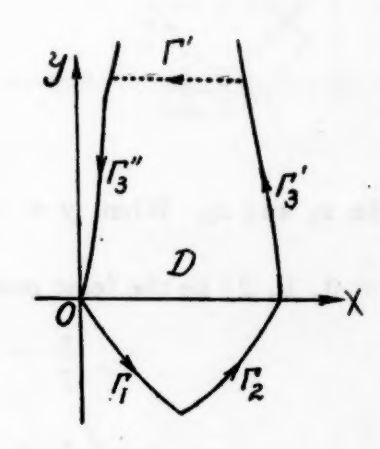
$$\frac{1}{5}\left[(1-3u)(1+6u)+\frac{u(-1+39u)(1+6u)}{8+18u-30u^2}\right]\frac{\sqrt{6}\arctan\sqrt{6u}-\arctan\sqrt{u}}{\sqrt{u}}+$$

$$+\ln\left[(1+u)\sqrt{8+18u-30u^2}\,\frac{\sqrt{6}\arctan\sqrt{6u}-\arctan\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\right]\leqslant 4.399. \quad (88)$$

由于 $y \leqslant y_1$ 对应于 $t \geqslant \frac{2}{\beta+2}$，由(86)可见即对应于 $u \leqslant \frac{1}{3}$. 因此必須核驗(88)式当 $0 < t \leqslant \frac{1}{3}$ 时是否成立. 計算結果表明，在 $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}$ 的范围內，(88)式左端在 $t = 0.03$ 附近取到不超过 3.660 的最大值，因此(88)式总是成立的. 由于 3.660 与 4.399 相差頗大，因此 β 在 2.5 附近的某一范围內，仍能使(87)式成立. 故得下列結果：

如果 $K(y)$ 由(83)式定出 ($\beta \approx 2.5$)，对于任何可能的 x_0，只要橢圓区域的边界綫 Γ_3 被限制在 $0 \leqslant x \leqslant x_0$ 內[1)]，則唯一性定理总是成立的.

如果 Γ_3 不是由一条曲綫构成，而是由几条伸延到无穷远互不相交的曲綫构成时，只要添加条件 $\overline{\lim_{y\to+\infty}} uu_y \leqslant 0$，則唯一性定理仍然成立. 这是因为上述証明中，在橢圓区域內是选取 $q = a_y = b = c = 0$，故在能量积分与零积分之和中沿 Γ_3 的綫积分(見[1])是



$$\int_{\Gamma_3}[(Ka_xu^2 - pu^2 - 2aKuu_x)dy + 2auu_ydx].$$

当 Γ_3 由伸延到无穷远的曲綫 Γ_3', Γ_3'' 等构成时，用横綫联接这些曲綫的积分(即图中 Γ' 上的积分)，取极限要不为負(見[1]). 即

$$\lim_{y\to+\infty}\int_{\Gamma'} auu_y\,dx \geqslant 0.$$

由于 $a > 0$，在 Γ' 上 $dx < 0$，因此上式成立的充分条件是

$$\overline{\lim_{y\to+\infty}}\, uu_y \leqslant 0.$$

参　考　文　献

[1] 董光昌，查甫雷金方程的唯一性定理(Ⅱ)，数学学报，6(1956)，250—262.

[2] Protter, M. H., Uniqueness theorems for the Tricomi problem II, *J. Rational Mech. Anal.* 4 (1955), 721—732.

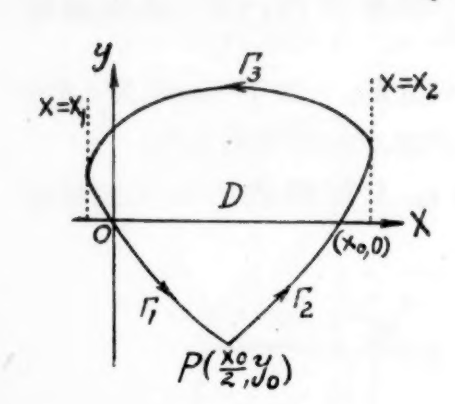
1) 按上述証明易知这限制可放寬为 $\frac{x_0-\bar{x}_0}{2} \leqslant x \leqslant \frac{x_0+\bar{x}_0}{2}$，甚至可更进一步放寬.

UNIQUENESS THEOREM FOR CHAPLYGIN'S PROBLEM (III)

TONG KWANG-CHANG

(*Chekiang University*)

ABSTRACT



In this paper the uniqueness problem of the Chaplygin's equation $K(y)\,u_{xx}+u_{yy}=0\,(K(0)=0;\ \frac{dK}{dy}>0$ for $y\neq 0)$ is considered. The domain D is bounded by three curves showing in the figure, where Γ_1 and Γ_2 are characteristics defined by the equation $dx^2+Kdy^2=0$, Γ_3 is a continuous curve. Let the coordinate of P be $\left(\frac{x_0}{2},\ y_0\right)$ and the minimum and maximum abscissas of Γ_3 be x_1 and x_2. When $y<0$, let $1+2\left(\frac{K}{K_y}\right)_y=f(y)$ and $\int_0^y\sqrt{-K}\ dy=Y$. Let j_n $(n=0,1,2)$ be the least positive roots of the following equations:

$$\frac{j_0}{2}=\operatorname{arc\,tan}\frac{2x_0}{-j_0x_1}+\operatorname{arc\,tan}\frac{2x_0}{j_0(x_2-x_0)};$$

$$\tan\left(\frac{j_1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2x_0}{j_1(x_2-x_0)}+\frac{2(x_0-j_1x_1)}{j_1(x_0-x_1-j_1x_1)};$$

$$\tan\left[\frac{j_2}{4}\left(1+\frac{-x_1}{2x_0-j_2x_1}-\frac{x_2-x_0}{2x_0+j_2(x_2-x_0)}\right)+\frac{\pi}{4}\right]+$$

$$+\tan\left[\frac{j_2}{4}\left(1-\frac{-x_1}{2x_0-j_2x_1}+\frac{x_2-x_0}{2x_0+j_2(x_2-x_0)}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=$$

$$=\frac{4}{j_2\left[1+\frac{-x_1}{2x_0-j_2x_1}+\frac{x_2-x_0}{2x_0+j_2(x_2-x_0)}\right]}\ (\text{when}\ |x_1+x_2-x_0|\leqslant 2x_0).$$

Let
$$X_0=x_0;\ X_1=x_0\left(1+\frac{-x_1}{2x_0-j_1x_1}\right);$$

$$X_2=x_0\left[1+\frac{-x_1}{2x_0-j_2x_1}+\frac{x_2-x_0}{2x_0+j_2(x_2-x_0)}\right]+$$

$$+\ \delta\left[x_0+2Y-\left|\frac{-x_0x_1}{2x_0-j_2x_1}-\frac{x_0(x_2-x_0)}{2x_0+j_2(x_2-x_0)}\right|\right],$$

Where $\delta=0$ or 1 according to $x_0+2Y-\left|\frac{-x_0x_1}{2x_0-j_2x_1}-\frac{x_0(x_2-x_1)}{2x_0+j_2(x_2-x_0)}\right|\geqslant 0$ or <0.

Finally, let $y_1 = 0$ if $f(y) > 0$ for all $y_0 \leqslant y < 0$, otherwise let y_1 be the upper bound of values y in the interval $y_0 \leqslant y < 0$ satisfying $f(y) < 0$.

Theorem. If $y_1 < 0$ and there exists a positive number ε and an integer $n (n=0,1,2)$ such that the following relation holds for $y_0 \leqslant y \leqslant y_1$:

$$(x_0 + 2Y + \varepsilon)\left[\frac{n}{X_n + nY + \varepsilon} + \frac{K_y f}{2(-K)^{3/2}} - \frac{f_y}{\sqrt{-K}(1-2f)}\right] +$$

$$+ \int_Y^0 \frac{2n dY}{X_n + nY + \varepsilon} + 2\int_Y^{Y(y_1)}\left[\frac{K_y f}{2(-K)^{3/2}} - \frac{f_y}{\sqrt{-K}(1-2f)}\right] dY + j_n \geqslant 0,$$

and if u is a quasi-regular solution which vanishes on $\Gamma_2 + \Gamma_3$, then $u = 0$ in D.

The example for gas dynamical problem shows that this theorem is better than the result of [1] and [2].

The method of proof of the theorem is to consider the sum of the energy integral $\int_D\int (au + bu_x + cu_y)(Ku_{xx} + u_{yy})\, dxdy = 0$ and the zero integral $\int_D\int \left[\frac{\partial}{\partial x}(pu^2) + + \frac{\partial}{\partial x}(qu^2)\right] dxdy + \oint [u^2(qdx - pdy) + d(ru^2)] = 0$ for suitable choice of a,b,c,p,q,r.

第9卷 第4期 数学学报 Vol. 9, No. 4
1959年12月 ACTA MATHEMATICA SINICA Dec., 1959

圓內解析函数的某些性質*

邱华吉
(北京酒仙桥业余工学院)

若函数 $f(z)$ 是圓 $|z|<1$ 內的解析函数，且满足：

$$\left\{\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty, \quad (0\leqslant r<1, p>0)$$

则称函数 $f(z)$ 属于 H_p 类，簡記为 $f(z)\in H_p$.

同样若函数 $u(z)$ 在圓 $|z|<1$ 內調和，且满足上述条件，则称函数 $u(z)$ 属于 h_p 类，簡記 $u(z)\in h_p$.

现在假如有两个单位圓內的解析函数，$f(z)$ 和 $g(z)$，确定为下列級数：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, \qquad g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n.$$

我們可以作另外一个圓內解析函数 $F(z)$，确定为下列級数：

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_nz^n.$$

对于函数 $F(z)$，Н. А. Давыдов[1] 得到了下面的結果：若在 $|z|<1$ 內，$f(z)\in H_1$，$|\mathrm{Re}\, g(z)|<C$ (C 为常数) 则 $F(z)$ 在 $|z|<1$ 中有界，因此在圓周 $|z|=1$ 上几乎处处有角形边界值存在.

实际上，我們还可以証明下列：

定理 1. 若在 $|z|<1$ 內，$f(z)\in H_p$, $\mathrm{Re}\, g(z)\in h_q$. 这里 $p>1, q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

则 $F(z)$ 在 $|z|<1$ 有界，因此在圓周 $|z|=1$ 上几乎处处有角形边界值存在.

証. 令 $z=re^{i\varphi}$, $g(z)=u(r,\varphi)+iV(r,\varphi)$，这样我們容易得到：

$$u(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos k\varphi-\beta_k\sin k\varphi)r^k. \tag{1}$$

这里有

$$\alpha_k+i\beta_k=\frac{1}{\pi r^k}\int_0^{2\pi}u(r,\varphi)e^{ik\varphi}d\varphi, \quad 0<r<1,\ k=0,1,2,\cdots$$

因为我們有 $f(r,e^{i(\theta-\varphi)})=\sum_{k=0}^{\infty}a_kr^ke^{ik(\theta-\varphi)}$，所以从(1)式得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\varphi)f(r,e^{i(\theta-\varphi)})\,d\varphi=\alpha_0a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_kz^k=F_1(z), \tag{2}$$

* 1957年11月8日收到.

这里 $z=\rho e^{i\theta}$，$\rho=r^2$，$0<\rho<1$.

由 Гельдера 不等式和定理的条件，可得

$$|F_1(z)|=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\varphi)f(r,\ e^{i(\theta-\varphi)})\,d\varphi\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{2\pi}|u(r,\ \varphi)|^q d\varphi\right]^{\frac{1}{q}}\left[\int_0^{2\pi}|f(r,\ e^{i(\theta-\varphi)})|^p\,d\varphi\right]^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant C.$$

因为 $F(z)=F_1(z)+a_0(b-\alpha_0)$，故 $|F(z)|\leqslant C_1$，$|z|<1$.

最后根据 Фату 定理[2]，知 $F(z)$ 在 $|z|=1$ 上角形边界值几乎处处存在.

定理 2. 若在 $|z|<1$ 内，$u(r,\varphi)\in h_1$ 则

1° 当 $f(z)\in H_1$ 时，$F(z)\in H_1$;

2° 当 $f(z)\in H_p$ 时，$F(z)\in H_p$，$p>1$;

因此 $F(z)$ 在圆周 $|z|=1$ 上，角形边界值几乎处处存在.

証 1°. 由(2)式可得

$$\int_0^{2\pi}|F_1(\rho e^{i\theta})|\,d\theta\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}|u(r,\ \varphi)|\,|f(r,\ e^{i(\theta-\varphi)})|\,d\varphi d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|u\ (r,\ \varphi)|\,d\varphi\int_0^{2\pi}|f\ (r,\ e^{i(\theta-\varphi)})|\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant C.$$

故由 $F_1(z)\in H_1$ 得 $F(z)\in H_1$.

証 2°. 由(2)式和定理的条件得

$$\left\{\int_0^{2\pi}|F_1\ (\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant\left\{\int_0^{2\pi}\left|\ \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u\ (r,\ \varphi)\,f\ (r,\ e^{i(\theta-\varphi)})d\varphi\ \right|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|u(r,\ \varphi)|\left\{\int_0^{2\pi}\left|\ f\ (r,\ e^{i(\theta-\varphi)})\ \right|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_1}{\pi}\int_0^{2\pi}|u(r,\ \varphi)|\,d\varphi\leqslant C.$$

故由 $F_1(z)\in H_p$，$p>1$，得 $F(z)\in H_p$.

最后由[2]第二章，我們知，若 $F(z)\in H_p$，$p\geqslant 1$ 时，則 $F(z)$ 在 $|z|=1$ 上，角形边界值几乎处处存在.

系. 在定理 1 或定理 2 的条件之下，我們可得 $F(z)$ 在 $|z|=1$ 上的角形边界值 $F(e^{i\theta})$，$(z=\rho e^{i\theta},\ \rho=r^2,\ 0<\rho<1)$ 可以表为下式:

$$F(e^{i\theta})=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u\ (1,\ \varphi)f(1,\ e^{i(\theta-\varphi)})d\varphi+a_0\ (b_0-\alpha_0). \tag{3}$$

实际上，由定理 1 或定理 2 的条件，我們可知 $u(r,\ \varphi)$ 和 $f(r,\ e^{i(\theta-\varphi)})$ 的角形边界值在 $|z|=1$ 上几乎处处存在，且

$$\lim_{r\to1}u(r,\varphi)=u(1,\ \varphi),\quad \lim_{r\to1}f(r,\ e^{i(\theta-\varphi)})=f(1,e^{i(\theta-\varphi)}).$$

又因为在 $|z|<1$ 中

$$|u(r,\varphi)|\leqslant|u(1,\varphi)|,\ |f(r,e^{i(\theta-\varphi)})|\leqslant|f(1,e^{i(\theta-\varphi)})|.$$

而从定理1或定理2的条件,可知 $|u(1,\varphi)|$ 和 $|f(1,e^{i(\theta-\varphi)})|$ 为 L 可积(参考[2]. 第二章 §2 和[3],第九章 §2 定理 3),故从勒貝格定理[4]可得

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 1}F_1(\rho,e^{i\theta})&=\lim_{\substack{\rho\to 1\\ r\to 1}}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\varphi)f(r,e^{i(\theta-\varphi)})d\varphi\quad \rho=r^2\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\lim_{r\to 1}u(r,\varphi)f(r,e^{i(\theta-\varphi)})d\varphi\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(1,\varphi)f(1,e^{i(\theta-\varphi)})d\varphi.\end{aligned}$$

故可得

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 1}F(\rho e^{i\theta})&=\lim_{\rho\to 1}F_1(\rho e^{i\theta})+a_0(b_0-\alpha_0)\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(1,\varphi)f(1,e^{i(\theta-\varphi)})d\varphi+a_0(b_0-\alpha_0).\end{aligned}$$

下面我們将进一步考虑与圓內解析函数的积分連續模有关的一些問題.

若 $f(z)\in H_p$, $p>1$, $|z|<1$, 我們已知 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 上角形边界值 $f(e^{i\theta})$ 几乎处处存在,且 $f(e^{i\theta})\in L_p$[4] 我們称 $\omega_p^f(\delta)$ 为 $f(z)$ 的积分連續模,表示为下式:

$$\omega_p^f(\delta)=\sup_{0<h\leqslant\delta}\left\{\int_0^{2\pi}|f(e^{i(\theta+h)})-f(e^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

則我們得到:

定理 3. 若在 $|z|<1$ 內, $\mathrm{Re}\, g(z)\in h_1$, $f(z)\in H_p$, $p>1$, 則成立:

$$\omega_p^F(\delta)\leqslant C\omega_p^f(\delta).\qquad (F(z)\ \text{的定义同前})$$

証. 由定理2,知 $F(z)\in H_p$, $p>1$, 故 $F(z)$ 在 $|z|=1$ 上的角形边界值 $F(e^{i\theta})$ 几乎处处存在. 又由(3)式可以得到:

$$F(e^{i(\theta+h)})-F(e^{i\theta})=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(1,\varphi)[f(1,e^{i(\theta-\varphi+h)})-f(1,e^{i(\theta-\varphi)})]d\varphi,$$

故若 $0\leqslant h\leqslant\delta$, 可得:

$$\begin{aligned}&\left\{\int_0^{2\pi}|F(e^{i(\theta+h)})-F(e^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|u(1,\varphi)|d\varphi\left\{\int_0^{2\pi}|f(1,e^{i(\theta-\varphi+h)})-f(1,e^{i(\theta-\varphi)})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\frac{1}{\pi}\omega_p^f(\delta)\int_0^{2\pi}|u(1,\varphi)|d\varphi\leqslant C\omega_p^f(\delta).\end{aligned}$$

因此有 $\omega_p^F(\delta)\leqslant C\omega_p^f(\delta)$. 得証.

定理 4. 若在 $|z|<1$ 中, $f(z)\in H_p$, $p>1$, $\mathrm{Re}g(z)\in h_1$, 則成立不等式:

$$\left\{\int_0^{2\pi}|F'(\rho e^{i\vartheta})|^p d\vartheta\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{C}{1-\rho}\omega_p^f\left[(1-\rho)\lg\frac{b}{1-\rho}\right],\ 0<\rho=r^2<1,\ b>1.$$

証. 由定理 2 知 $F(z)\in H_p$, $p>1$, 則 $F(z)\in H_1$, 故由 Г. Н. Фихтенгольц 定理[2]可得:

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{F(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta}-\rho e^{i\vartheta}},\qquad z=\rho e^{i\vartheta},\ \rho'=r^2<1;$$

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{F(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta}{(e^{i\theta}-\rho e^{i\vartheta})^2}.$$

这样一来,我們利用(3)式可得:

$$F'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{F(e^{i\theta})-F(e^{i\vartheta})}{(e^{i\theta}-\rho e^{i\vartheta})^2}e^{i\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}}{(e^{i\theta}-\rho e^{i\vartheta})^2}d\theta\int_0^{2\pi}u(1,\varphi)[f(1,e^{i(\theta-\varphi)})-f(1,e^{i(\vartheta-\varphi)})]d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}u(1,\varphi)d\varphi\int_0^{2\pi}\frac{f(1,e^{i(\theta-\varphi)})-f(1,e^{i(\vartheta-\varphi)})}{(e^{i\theta}-\rho e^{i\vartheta})^2}e^{i\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}u(1,\varphi)\,d\varphi\int_0^{2\pi}\frac{f(1,e^{i(\vartheta-\varphi)})-f(1,e^{i(\vartheta-\alpha-\varphi)})}{(e^{-i\alpha}-\rho)^2}e^{-i\alpha}e^{-i\vartheta}d\alpha.$$

上式令 $\theta=\vartheta-\alpha$ 得到. 这样一来可得:

$$\left\{\int_0^{2\pi}|F'(z)|^p d\vartheta\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}u(1,\varphi)\,d\varphi\left\{\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\frac{f(1,e^{i(\vartheta-\varphi)})-f(1,e^{i(\vartheta-\alpha-\varphi)})}{(e^{-i\alpha}-\rho)^2}d\alpha\right|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}u(1,\varphi)\,d\varphi\int_0^{2\pi}\frac{1}{(e^{-i\alpha}-\rho)^2}d\alpha\left\{\int_0^{2\pi}|f(1,e^{i(\vartheta-\varphi)})-f(1,e^{i(\vartheta-\varphi-\alpha)})|^p d\vartheta\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi}u(1,\varphi)d\varphi\int_0^{2\pi}\frac{\omega_p^f(\alpha)d\alpha}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2}$$

$$\leqslant C_1\int_0^{2\pi}\frac{\omega_p^f(\alpha)d\alpha}{1-2\rho\cos\alpha+\rho^2}.$$

因为当 $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$, $\sin\frac{\alpha}{2}\geqslant\frac{\alpha}{\pi}$, 則

$$1-2\rho\cos\alpha+\rho^2=(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{\alpha}{2}\geqslant(1-\rho)^2+\frac{4\alpha^2\rho}{\pi^2},$$

$$\left\{\int_0^{2\pi}|F'(z)|^p d\vartheta\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant C_1\int_0^{\pi}\frac{\omega_p^f(\alpha)d\alpha}{(1-\rho)^2+\frac{4\rho\alpha^2}{\pi^2}}.$$

令 $\alpha=\frac{\pi(1-\rho)}{2\sqrt{\rho}}\zeta$, 則

$$\left\{\int_0^{2\pi}|F'(z)|^p d\vartheta\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant C_1\int_0^{\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}}\frac{\omega_p^f\left[(1-\rho)\frac{\pi\rho}{2\sqrt{\rho}}\right]}{1+\zeta^2}\cdot\frac{(1-\rho)\frac{\pi}{2\sqrt{\rho}}}{(1-\rho)^2}d\zeta.$$

又由于 $\omega_p(\lambda\delta) \leqslant (\lambda+1)\omega_p(\delta)$，則当令

$$\lambda = \frac{\pi\zeta}{2\sqrt{\rho}\lg\frac{b}{1-\rho}}, \quad \delta = (1-\rho)\lg\frac{b}{1-\rho},$$

我們又可以得到:

$$\left\{\int_0^{2\pi}|F'(z)|^p d\vartheta\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{C_1\omega_p^f\left[(1-\rho)\lg\frac{b}{1-\rho}\right]}{2\sqrt{\rho}(1-\rho)}\int_0^{\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}}\frac{1+\frac{\pi\zeta}{2\sqrt{\rho}\lg\frac{b}{1-\rho}}}{1+\zeta^2}d\zeta$$

$$\leqslant C_1\frac{\omega_p^f\left[(1-\rho)\lg\frac{b}{1-\rho}\right]}{1-\rho}\left\{\frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt{\rho}}{1-\rho}}{2\sqrt{\rho}}+\right.$$

$$\left.+\frac{\pi}{4\rho\lg\frac{b}{1-\rho}}\lg\frac{1+\rho}{1-\rho}\right\}, \quad \rho<1$$

$$\leqslant C\frac{\omega_p^f\left[(1-\rho)\lg\frac{b}{1-\rho}\right]}{1-\rho}.$$

故定理 4 得証.

定理 5. 若在 $|z|<1$ 内，$\operatorname{Re} g(z) \in h_1$，解析函数 $f(z)$ 满足不等式:

$$\left\{\int_0^{2\pi}|f(r,e^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \psi(1-r), \quad p>1, \quad r<1.$$

此地函数 $\psi(x)$ 是一个和 $\frac{1}{x}$ 一同无限上升的函数，并且

$$\int_0^a \psi(x)dx < \infty,$$

則 $F(z)$ 的原函数 $H(z)=\int F(z)dz$ 在圓周 $|z|=1$ 上有积分連續模滿足

$$\omega_p^H(\delta) \leqslant C\lambda(\delta), \quad \lambda(x)=\int_0^x \psi(x)dx.$$

証. 因为由(2)式可得.

$$\left\{\int_0^{2\pi}|F_1(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|u(r,\varphi)|d\varphi\left\{\int_0^{2\pi}|f(r,e^{i(\theta-\varphi)})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\psi(1-r)\int_0^{2\pi}|u(r,\varphi)|d\varphi$$

$$\leqslant C_1\psi(1-r).$$

由于 $F(z)=F_1(z)+a_0(b_0-\alpha_0)$，故可得

$$\left\{\int_0^{2\pi}|F(\rho e^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant C_2\psi(1-r).$$

故由 Геронимус 定理[[5]定理4″]可得

$$\omega_p^H(\delta) \leqslant C\lambda(\delta), \quad \lambda(x) = \int_0^x \psi(x)dx.$$

定理証完.

参　考　文　献

[1] Давыдов Н. А., Об однои ошибочной теореме Дайович *УМН* XII вып 3 (1957) 295—296.
[2] Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций. Изд. 2-с М—Л. Гостехиздат, 1950.
[3] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комлексного переменного. М—Л. Гостехиздат, 1952.
[4] 那湯松：实变函数論，商务印书館 1953 年 8 月初版.
[5] Геронимус Я. Л., О некоторых свойствах аналитических функций непрерывных в замкнутом круге или круговом секторе. Матем сб. **38**(80) (1956), 319—330.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ

Чю Фа-ти

(*Цзюсианьчаоский Инженерный Институт, Пекин*)

Реферат

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ и $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$—функции, аналитическая в $|z| < 1$, положим

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n.$$

В настоящей работе мы получим, что

1) Если $f(z) \in H_p$ (цитированная литература. [2]), $\operatorname{Re} g(z) \in h_q$, где $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то

$$|F(z)| < C \qquad \text{(C—постоянная)};$$

$F(z)$ почти всюду на единичнои окружности имеет угловые граничные значения.

2) Если $g(z) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$, $u(r, \varphi) \in h_1$, $f(z) \in H_p$, то

$$F(z) \in H_p \qquad (p \geqslant 1);$$

$F(z)$ почти всюду на единичнои окружности имеет угловые граничные значения.

3) Если $f(z)$ и $g(z)$ удовлетворяет условию 1) или 2), положим

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\varphi - \beta_k \sin k\varphi) r^k,$$

то

$$\lim_{\rho \to 1} F(\rho, e^{i\theta}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(1, \varphi) f(1, e^{i(\theta - \varphi)}) d\varphi + a_0(b_0 - \alpha_0).$$

Пусть $f(z) \in H_p$, $p > 1$, $|z| < 1$, $f(e^{i\theta})$ является почти всюду на $|z| < 1$ угловым граничным значениям функции $f(z)$, то $f(e^{i\theta}) \in L_p$ положим

$$\omega_p^f(\delta) = \sup_{0 < h \leqslant \delta} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(e^{i(\theta+h)}) - f(e^{i\theta})|^p \, d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

следовать:

1) Если $\operatorname{Re} g(z) \in h_1$, $f(z) \in H_p$, $p > 1$, то

$$\omega_p^F(\delta) \leqslant C\, \omega_p^f(\delta),$$

C—постоянная.

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |F'(\rho e^{i\theta})|^p \, d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{C}{1-\rho}\, \omega_p^f \left[(1-\rho) \lg \frac{b}{1-\rho} \right],$$

где $\rho = r^2 < 1$, $b > 1$.

2) Если $\operatorname{Re} g(z) \in h_1$ и

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |f(r, e^{i\theta})|^p \, d\theta \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \psi(1-r) \qquad (p > 1,\ r < 1),$$

где $\psi(x)$ и точно же $\frac{1}{x}$ — возрастание функций, удовслетворяющей условию

$$\int_0^a \psi(x) dx < \infty.$$

положим $H(z) = \int F(z)\, dz$, то

$$\omega_p^H(\delta) \leqslant C\lambda(\delta) \qquad (C\text{—постоянная}),$$

где

$$\lambda(x) = \int_0^x \psi(x)\, dx.$$

第9卷 第4期
1959年12月

数 学 学 报
ACTA MATHEMATICA SINICA

Vol. 9, No. 4
Dec., 1959

普否系統、直覚系統、共否系統及其它*

莫 紹 揆
(南京大学数学天文系)

現先把本文所用的符号解释如下.

我們用 $p, q, r, \cdots$ 等表示原子命題,用 N, C 分别表示联接詞"非"及"蘊涵". 在本文所討論的邏輯系統中只假定出現有这两个联接詞(在引証的情形下,偶尔用及其它的联接詞,K 表合取,A 表析取,E 表实質等价). 联接詞 C 适合分离原則如下:

$$C\alpha\beta,\ \alpha \rightarrow \beta \text{(即由 } C\alpha\beta \text{ 及 } \alpha \text{ 可推得 } \beta\text{)}.$$

分离原則省記为"分". 如果(a)(b)为某两命題的編号,我們用"分(a)(b)"表示把(a)当作 $C\alpha\beta$ 把(b)当作 α 而应用分离原則时所推出的命題即 β. 由于必須把(b)(当作 α)化得与(a)(即 $C\alpha\beta$)的蘊涵前件相同之故,对(a)(b)須作怎样的代入,所获得的命題究竟是什么命題,将是唯一的(除所用的原子命題的記号可能不同以外). 因此我們不再标明該作怎样的代入了. 如果(c)又是另一命題的編号,我們用"分(c)分(a)(b)"表示把(c)当作 $C\alpha\beta$,把"分(a)(b)"当作 α 而应用分离原則时所得的命題,用"分分(a)(b)(c)"表示把"分(a)(b)"当作 $C\alpha\beta$ 把(c)当作 α 而应用分离原則时所推出的命題. 对其它的規則亦准此(在我国首先使用这个記法的是沈有鼎先生[1],在国外是 Lemmon 等人,两者是同时互相独立地开始采用的.)

讀者不难驗証,如果"(a)"具 $C\alpha\beta$ 之形,則"分(a)"可以讀作下列的規則

$$\alpha \rightarrow \beta.$$

又如果(b)具 $C\alpha C\beta\gamma$ 形,則"分分(b)"可以讀作下列的規則:

$$\alpha, \beta \rightarrow \gamma.$$

其它准此. 利用这个讀法,可以很快的根据所标記的証明程序而恢复出原来的証明(当然不用这种讀法,只用上段的讀法亦成).

此外我們用 H, I, J, M, T 表示一些重要的邏輯系統,用 X, Y 表示一般的、不定的邏輯系統. H_0, X_0 等表示系統 H, X 內无 N 可証命題集. α, β, γ 等表示命題(不限定为原子命題),i, j, k, m, n 等表示正整数或0.

其它的記号将随文声明.

引 言

我們知道,直覚主义邏輯創始于 L. E. J. Brouwer[1],他不承認排中律但不准否認排中律. 他断言"排中律矛盾之矛盾",其意是,誰說排中律是矛盾的,誰便自身陷于矛盾了. 設以 α 表示排中律,那末他不承認 α,但否認 $N\alpha$(亦即承認 $NN\alpha$). 把他的邏輯来形式

* 1957年12月25日收到.

化的，首先是 A. Колмогоров[1]，其次是 A. Heyting[1]，两人所得的系統并不完全相同．前者所得的系統（下文叫做系統 J）有下述的性質[1)]：如果在传統的二値系統（以后叫做系統 M）中推出一命題 α，則把 α 中各部分命題都加上双重否定后，所得的命題必能在系統 J 中推出．后者所得的系統（以后叫做系統 H）亦有一个性質：如果在系統 M 中推出一命題 α，則在系統 H 中必可推出 $NN\alpha$；如果在系統 M 中推出 $N\alpha$，則在系統 H 中亦必推出 $N\alpha$，逆理亦眞．

从 Brouwer 的观点看来，系統 H 无疑是更貼近一些，因此近来提到直覚主义系統时，都专指系統 H．既然如此，把系統 M 与系統 H 間的上述关系叫做直覚关系，把凡与系統 M 有这种关系的系統叫做直覚主义系統那是很适当的．本文的第一个目的在于研究各种直覚主义系統的性質，并从而提出一个最适当的直覚系統来（§2）．

其次，如 I. Johanson[1] 所指出的，系統 J 还有一个非常有趣的性質，下文叫做普否性．原来，照通常的看法，"非 p"与"由 p 推出矛盾（即由 p 推出假命題）"是一样的，換句話說，在系統 M 中，如果把已推出的命題中的"$N\beta$"形的部分命題换成"$C\beta O$"（"O"表示假命題），結果所得的命題当然仍可在系統 M 中推出．但假命題 O 本身却具有特定的性質，絕不能任意换为其它的命題，更不能换为任意的原子命題（否則，某些可証命題便会丧失可証性了）．但对系統 J 来說，任意一个可推出的命題，把其中"$N\beta$"形的部分命題换为"$C\beta v$"（v 为原子命題）后，所得的命題仍可在系統 J 中推出．这种性質今后叫做普否性（意指否定可普遍化）．凡具有这种性質的系統，今后叫做普否系統．本文另一个目的在于研究几种著名的普否系統的性質（§1）．

我們又把直覚主义系統推广而成共否系統（§3）．平行地，我們又相应地定义仿模态系統及共△系統（§4）．这些系統的研究便是本文的第三目的．

本文的最主要結果是（好些名詞的定义見后）：

1. 凡兼具普否性及引否性的共否系統（包括直覚系統）以及可△归納性的共△系統（包括仿模态系統），如果存在的話，必是唯一的．

2. 所有直覚系統在某种意义上包含了系統 M 的全部可証命題，但未必包含了系統 M 的全部推演規則．

3. 討論系統 H 的不滿意处，并提出两个系統（I_3 或 I_4）供直覚主义者选择采用．

4. 根据所引入的各种概念討論了一些著名邏輯系統的种种特性，使这些系統的結构更为明了．

§1 普否及引否系統

所謂把一命題中的否定联結詞消去是指把凡是"$N\beta$"形的部分命題均代以"$C\beta v$"．精确的定义如下：

定义．下列的运算"$'$"叫做消否运算：設 v 不在命題 α 的表达式中出現．如 α 为原子命題，則 $\alpha' = \alpha$．

其次，若 $\alpha = N\beta$，則 $(N\beta)' = C\beta' v$．

1) 設用 $\bar{C}pq$ 表示 $NNCNNpNNq$，則只要在某一系統中推出 M 的相应公理（即把 M 公理中的 C 改为 $\bar{C}$ 而成的），再推出下列規則"$\alpha, NNCNN\alpha N\beta \longrightarrow N\beta$"（注意，这規則与"$\alpha, \bar{C}\alpha\beta \longrightarrow \beta$"并不完全相同），那末該系統亦具有同样的性質．因此即使比 J 弱得多的系統亦可具有該性質．

若 $\alpha = C\beta\gamma$，則$(C\beta\gamma)' = C\beta'\gamma'$.

最后，設 $F(\neq N, C)$ 为 k 項联結詞而 $\alpha = F\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k$，則$(F\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k)' = F\alpha_1'\alpha_2'\cdots\alpha_k'$.（在本文討論中，联結詞 F 是不出現的，故本項定义是无用的）.

依这个定义变化后，所得的 α' 叫做 α 的消否命題，而 α 則叫做 α' 的引否命題.

例如，"$CCpqCCNpqNp$"的消否命題为"$CCpqCCCpvqCpv$".

其次，由 "$CCpqCCCprqCpr$" 可得到下列引否命題：1. $CCpqCCNpqNp$（把 r 看作 v 而得）. 2. $CNpCNCprCpr$（把 q 看作 v 而得）. 3. $CNpCNNpNp$（先把 r 換为 q，再把 q 看作 v）[1].

总之，在某一命題表达式中只要有某一个原子命題未曾做过 C 的前件的，都可以看作 v 因而（把 $C\beta v$ 換为 $N\beta$）得出一个引否命題来. 这是作引否命題的一般方法.

定义. 若 α' 可在系統 X 中推出，則說 α 可普否于 X 中；若 α 的一切可能的引否命題均可在 X 中推出，則說 α 可引否于 X 中.

有些命題，例如 "$CNNpp$"，它的消否命題不是自相矛盾的命題. 因它的消否命題是 $CCCpvvp$，而在二值系統內我們有 $EEEpqqp$，E 系統既非矛盾系統，則該消否命題自能被一些方陣所滿足，因而非自相矛盾命題了. 故 $CNNpp$ 可普否于某些系統中.

又有些命題，例如 $CpCNpq$，它的消否命題却是自相矛盾的命題. 它的消否命題为 $CpCCpvq$，設記为(1). 則

$$\text{分分}(1)(1)(1) = (2): \quad q$$

由(1)既可推出原子命題 q，故(1)为自相矛盾命題. 因此，$CpCNpq$ 不能普否于任何系統中.

定义. 若一系統中所有可証命題均可普否（引否）于該系統中，則該系統叫做普否（引否）系統.

这定义可詳細說明如后. 設有一系統 X，則把 X 的可証命題中的无 N 命題（在本文討論范围內也就是純 C 命題）集記为 X_0. 含 N 的可証命題而能由 X_0 的命題根据引否而得的，其集記为 X_1，此外的含 N 可証命題（不能由 X_0 的命題引否而得的），其集記为 X_2. 依这定义，如果 X_0 中的各命題所有可能的引否命題均在 X_1 內，則系統 X 为引否系統. 如果 X_2 为空集，則系統 X 为普否系統. 大体說来，普否系統的特点是"含 N 命題不太多"，引否系統的特点是"含 N 命題不太少".

試就命題集 X_0 加入定义 "$Np = CpO$"，設把所得的系統記为 X^*. 則当 X 为普否系統时，X^* 包含 X（因系統 X 內无 X_2，而 X_1 均可由 X_0 加入上定义而推出）. 当 X 为引否系統时，X 包含 X^*（因 X_0 加入上定义后所推出的新命題均在 X_1 內，而系統 X 內可能多出 X_2）. 当 X 为普否兼引否系統时，$X^* = X$.

換句話說，X 为普否系統的必要与充分条件是：当加入定义 "$Np = CpO$" 于命題集 X_0 后，所有 X 內含 N 的公理（及含 N 可証命題）均可推出，或者是：所有含 N 公理的消否命題可以推出，所有含 N 的推演規則，其相应的消否的規則亦可以推出.

其次，X 为引否系統的必要与充分条件是：当加入上定义于命題集 X_0 后所能推出的

[1] 这可看作"間接"引否而得的命題（先作代入再引否）.

含N命題均可由原系統X推出.

最后,如果X为普否兼引否系統,則系統X与系統X^*即“X_0加上定义$Np = CpO$”全同. 因此,一个普否兼引否的系統,可由它的无N可証命題集(即X_0)完全决定. 这点說来虽然簡单,但下文屡次用到.

定理 1.1. 如果在一系統X中可以找出一个其表达式不含原子命題p的命題η,使得在X中“Np”与“$Cp\eta$”可以互相替換(亦即在系統X中,$\phi(Np)$与$\phi(Cp\eta)$可以互相推出),則X为引否系統.

証. 設α为X中任意一可証命題,今須証α可引否于X中,即把α表达式中某一个未曾做过C前件的原子命題(設为q)改为v,再把$C\beta v$形的部分表达式换为$N\beta$后,所得的命題(即α的引否命題)可在X中推出.

今按若不把q改为v,而直接将q代以η,再将$C\beta\eta$形的部分表达式换为$N\beta$,仍得α的引否命題,准假設,替换前后两命題可以互相推出,故知α的引否命題可以推出. 故定理得証.

定理 1.2. 如果在一系統X中已經推出了下列三命題:

(1) $CCppCqq$,

(2) $CpCCpqq$,

(3) $CCpqCCqrCpr$,

則該系統为引否系統的必要充分条件是:它又能推出

(4) $CCpNqCqNp$.

証. (必要性)由(2)(3)可推出下命題:

(5) = 分分分(3)(3)(2)(2) $CCsCpqCpCsq$.

(5)的引否命題(把q看作v)为(4). 故若X为引否系統,則(4)必可推出,而条件为必要.

(充分性)由(3)可得下列二規則:

$$C\alpha\beta \rightarrow CC\beta\gamma C\alpha\gamma,$$
$$C\beta\alpha \rightarrow CC\alpha\gamma C\beta\gamma.$$

又由(2)(3)可得(5)見上,再得

(6) = 分(5)(3) $CCqrCCpqCpr$.

由(6)可得下列二規則:

$$C\alpha\beta \rightarrow CC\gamma\alpha C\gamma\beta,$$
$$C\beta\alpha \rightarrow CC\gamma\beta C\gamma\alpha.$$

由上述四个規則,容易証明,对由α及其他命題純粹应用联結詞C而組成的命題$\phi(\alpha)$来說,如把α换为β得$\phi(\beta)$,則当已推出$C\alpha\beta$及$C\beta\alpha$时,$\phi(\alpha)$与$\phi(\beta)$可以互相推出.

設用η表示命題$NCqq$,今証有$CNpCp\eta$及$CCp\eta Np$,因而Np与$Cp\eta$便可以替换而不更改其可推出性,依定理 1.1,系統X便是引否系統了. 这两命題的証明如下:

(7) = 分分(5)(4)分(1)(1) $CCp\eta Np$.

(8) = 分(4)分(1)(1) $CpNNp$.

(9) = 分(5)分分(6)分分(3)分(6)(8)(4)分(5)(1) $CNpCp\eta$.

(7)(9)即所求两命題,故定理得証.

定义. 在一系統X中删除那些不能普否的可証命題,所得的必是普否系統,叫做X的弱普系統，記为wgX. 又若把X中各可証命題的消否命題通通加到X来（加入后用分离原則而得出的命題当然亦一起加入），所得的仍是普否系統，叫做X的強普系統，記为sgX.

換句話說,把X_2删除便得$wgX(=X_0+X_1)$，把X_2中的命題的消否命題（其集可記为X_2'）加入,即得$sgX(=X_0+X_2'+X_1+X_2)$[1].

显見,wgX是包含于X内的普否系統中最強的一个,sgX是包含X的普否系統中最弱的一个. 两种系統都恆存在,但有时sgX可能为矛盾系統,这时我們說sgX不存在.

显然,当而且只当X为普否系統时，$X=sgX=wgX$. 并且这三个系統只要有两个相等,第三者亦必相同,因而便是普否系統. 又wgX, sgX既恆为普否系統,故恆有

$$wgwgX=sgwgX=wgX;\quad wgsgX=sgsgX=sgX.$$

由定义,如X为普否系統,則sgX及wgX亦然,但我們还有下定理:

定理 1.3. 如果X为引否系統,則wgX亦然.

証. 如果X_0中每个命題的所有引否命題均在X_1内,則删除X_2后亦然,故wgX亦为引否系統.（注意,即使X_0中命題的引否命題在X_1内,但X_2'内命題的引否命題可能不在X_2内,因X_2'内命題虽由X_2内的作消否而得,但由X_2'内命題引否时,除原来的命題外,可能还得出其它命題. 因此sgX未必为引否系統).

还可注意,如果X为引否系統，則由X_0加入定义$Np=CpO$后，所得的系統X^*与wgX全同. 因X既为引否,則X^*恰巧只含有X_0与X_1两者,与wgX全同. 作为特例，如果X_0中含有定理 1.2 中所叙述的三个命題,則X_0加入"$CCpNqCqNp$"后，便可以得到系統wgX. 这点以后将常用到(如定理 1.5 及 1.7 等处).

有了上述各性質后,我們可就一些著名的系統加以研究[2].

定理 1.4. 系統sgM与sgH为矛盾系統.

証. 在M与H中均有可証命題$CpCNpq$，这命題的消否命題便是自相矛盾的命題（見上).

定理 1.5. $wgH=J$（故$wgJ=J=sgJ$).

証. 因在H内可推出定理 1.2 内的四个命題,故H为引否系統，故在H_0加入定义$Np=CpO$后即得wgH，但依定理 1.2,該定义与公理$CCpNqCqNp$等价. 但H_0加入該公理显得系統J. 故$wgH=J$. 故J为普否系統[3],因而又得$wgJ=J=sgJ$.

关于系統J还有一个有趣性質如下.

定理 1.6. 若在系統M内可以推出純C命題α,則

$$C^{2n}\alpha p_1p_1p_2p_2\cdots p_np_n\ (C^{2n}\text{ 表示 }2n\text{ 个“}C\text{”連写,以后同}).$$

必可在J内(因而更強系統内)推出，其中諸p为在α的表达式中出現的彼此不同的原子

1) 由$X_0+X_2'+X_1+X_2$中的命題依分离原則而推出的命題亦包括在内. 由于我們假定每一系統均有分离原則之故,本文中均作这种理解:凡提及一命題集X时,它兼包括由X根据分离原則而推出的命題.

2) 关于系統H内的可証命題可参見 Heyling[1]，关于系統J内的可証命題,可参看 I. Johanson[1]，关于系統M内的可証命題可由熟知的二值方陣确定,在本文内均不詳細推演.

3) J为普否系統一事,首先由 I. Johanson[1] 所証明.

命題.

証. 我們知道,在系統 J 內可推出下列規則:

(a) $\alpha \to CC\alpha pp$

(b) $CC\alpha pp \to CCCC\alpha ppqq$ 及 $CCCC\alpha qqpp$

(c) $C^{2n}\alpha p_1 p_1 p_2 p_2 \cdots p_n p_n$, $C^{2n+1}\alpha\beta p_1 p_1 p_2 p_2 \cdots p_n p_n \to C^{2n}\beta p_1 p_1 p_2 p_2 \cdots p_n p_n$.

規則(a)意指任意一命題可以加上"尾巴",規則(b)意指,一命題加上"尾巴"后,还可継續加"尾巴",新"尾巴"可在旧"尾巴"前亦可在其后,規則(c)意指,只要"尾巴"相同,卽可仿分离原則进行变形.

此外容易在 J 內推出命題"$NNCCNppp$",因 J 为普否,故必又推出 (1) $C^5pqppqq$. 今設在命題 β 的表达式中位居最后的原子命題为 q, 則在 J 中可以推出(2)$Cq\beta$. 由(1)(2)再应用 J 內的規則容易推出 (3) $C^5 p\beta ppqq$.

我們知道(見莫紹揆[1]),若将命題 (4) $CCCpqpp$ 加入系統 J, 則可推出系統M的所有純C命題,因此可假設在推出M中純C命題时,除用到(4)外,悉用 J 內的命題. 今設在M中推出純C命題 α 时曾用到命題(4)若干次(每次可作不同的代入). 具体說来,曾用到下列命題:

$$CCC\gamma_1\beta_1\gamma_1\gamma_1,\ CCC\gamma_2\beta_2\gamma_2\gamma_2,\ \cdots,\ CCC\gamma_m\beta_m\gamma_m\gamma_m.$$

今把在 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 的表达式中位居最后的原子命題列出,設把其中不同的記为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$. 今把在系統M內推理过程中所用到的每个命題末后都添上一条"尾巴""$p_1p_1p_2p_2\cdots p_np_n$". (这里我們設 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 互不相同. 这一性質在以下推出(8)时要用到) 易見,加上这条尾巴后,每一个命題都是在 J 內可以推出的命題.

因为,設未加尾巴之前該命題本可在系統 J 內推出,則依(a),加尾巴之后仍可在 J 內推出;若未加尾巴前的命題为 $CCC\gamma_i\beta_i\gamma_i\gamma_i$, 而 p_k 为 β_i 中最后一个原子命題, 依上知 $C^5\gamma_i\beta_i\gamma_i\gamma_i p_k p_k$ 可在 J 內推出, 再継續前后加尾巴使尾巴呈 $p_1p_1p_2p_2\cdots p_np_n$ 形时, 依(b),所得命題仍可在 J 內推出. 最后,如果未加尾巴时該命題本非 J 內可推出的命題,則它必由使用分离原則"$C\gamma\delta, \gamma \to \delta$"而推出. 依归納假設 $C\gamma\delta, \gamma$ 加尾巴后可在 J 內推出,故依(c),加尾巴后可仿分离原則而在 J 內进行变形, 故 δ 加尾巴后仍可在 J 內推出. 因此可見最后一命題卽 α 加尾巴后必可在 J 內推出,卽在系統 J 內可以推出 (5) $C^{2n}\alpha p_1 p_1 p_2 p_2 \cdots p_n p_n$.

尾巴中的各原子命題 p 本是在各 β 的表达式中位居最后的原子命題,如果它們有些,比如 p_2, 不出現在 α 的表达式中,那末可依下法删去:在系統 J 中我們有:(6)Cpp, 継續使用(a)(b)于(6)可得:

(7) $C^{2n-3}ppp_3p_3\cdots p_np_n$,

(c)(5)(7) = (8) $C^{2n-2}\alpha p_1p_1p_3p_3\cdots p_np_n$.

卽原子命題 p_2 已在尾巴中消除了. 継續使用此法, 可把不出現于 α 表达式中的原子命題从尾巴中除去,留下来的只有出現于 α 表达式中的原子命題了. 定理得証.

这定理表明了,尽管系統 J 比系統M弱得多,但在系統 J 中仍有系統M的某种"模型"存在. 下面我們討論 wgM 的性質.

定理 1.7. 系統 wgM 可由 M_0 加上定义 "$Np = Cpv$" 而得. 它又可公理化如下 (分

离原则当然須假定，这里及下文均不再明显提出）：

$$CCCpqrCCrpCsp,\quad CCpNqCqNp.$$

証. M_0 中含有定理 1.2 中的三个命题，故依定理 1.2 加入 $CCpNqCqNp$ 后，它即为引否系統．再依定理 1.3 后的注意，即得 wgM．依 Łukasiewicz[2] 可知 M_0 中的命题可由第一个公理推出．

定理 1.8. wgM 是系統M与下方陣所决定的系統的共通部分．

C	0	1	N
*0	0	1	0
1	0	0	0

* 表特指值，C下直行表示C前件所取的值，C右横行表示C后件所取的值，以后同．

証. C 方陣所决定的恰为 M_0．其次，对M系統的鑑定方陣言，有关系式"$Np = Cp1$"，而在上面的N方陣中又有关系式"$Np = CpO$"，故其共通系統中必須同时适合两者．但該方陣只有 0,1 二值，故知其共通系統須适合关系"$Np = Cpv$"．可見該共通系統部分必是 wgM．

凡两方陣所定系統的共通部分系統可由两方陣的"积"而决定之．因此 wgM 可由下列方陣决定（作上述两方陣之"积"而得）：

C	0	1	2	3	N
*0	0	1	2	3	1
1	0	0	2	2	0
2	0	1	0	1	1
3	0	0	0	0	0

或

N
2
2
0
0

定理 1.9. wgM 的又一組鑑定方陣可如下作出：以 $0,1,2,\cdots,n$ 为值（$n \geqslant 2$），而 0 为特指值．并規定

$Cii = 0$，又当 $i \neq j$ 时 $Cij = j$ $(i,j = 0,1,\cdots,n)$，

$Ni = Cik$ （$i = 0,1,\cdots,n$，而 k 为一預先固定的异于 0 的值）．

例如，当 $n = 2$ 而 $k = 1$ 时其方陣如下：

C	0	1	2	N
*0	0	1	2	1
1	0	0	2	0
2	0	1	0	1

証. 容易驗証这里的C方陣满足关于 M_0 的公理，因 M_0 是完备的而这里的C方陣不是矛盾方陣，故知这里的C方陣必是 M_0 的鑑定方陣．其次，就該C方陣言，除值 0 外各值是对称的，因此虽只規定"$Np=Cpk$"，实际上等于"$Np=Cpv$"（$v \neq 0$）．要証明該方陣决定系統 wgM，只須証明，尽管这里有 $v \neq 0$ 的条件，但就对"Cpv"的賦值言，即使允許 v 可賦值以 0，而可証命題亦不致因而减少．因此証了下述引理后我們的定理便得到証明了．

引理. 設在一个依上述的C方陣而作的賦值中,一命題α取非特指值a,今若把刚才賦值以0的原子命題,改賦值以a以外另一非特指值b,則在新賦值中α仍取得值a.

証. 我們依賦值以a的原子命題个数(下文叫做遞归数)h而作归納証明. 显然$h \neq 0$(否則α不会取得值a).

当$h = 1$时,由于α取得值a之故,α表达式中最后的原子命題必賦值以a,其余各命題均不賦值以a. 賦值时α呈下形

$$C\beta_1 C\beta_2 \cdots C\beta_s a.$$

在新賦值中既不会新增賦值a,故諸β絕不能取值a,因而新賦值結果α仍取值a.

設当遞归数$< h$时引理已証明眞确,今証当遞归数$= h$时引理仍眞确. 設β_i的表达式中最后一个原子命題賦值以c_i. 又分三种情形討論.

(1) $c_i = 0$时. 在新賦值中c_i改为b,故新賦值結果β_i或取值0或取值b,絕不取值a.

(2) $c_i \neq 0, a$. 在新賦值中,c_i照旧不改,故在新賦值中,β_i或取值0或取值c_i,絕不取值a.

(3) $c_i = a$. 在旧賦值中,由于α取值a之故,β_i絕不能取值a(否則α取值0)故β_i只能取值0. 在賦值时β_i呈下形

$$C\gamma_1 c\gamma_2 \cdots c\gamma_t a,$$

既然β_i取值0(在旧賦值中),故至少有一个γ取值a,但γ中被賦值以a的原子命題个数必少于h,故依归納假設,在新賦值中γ仍取值a,在新賦值中β_i最后一个原子命題既仍賦值以a,足見β_i(在新賦值中)仍取值0,絕不取值a.

总而言之,无論什么情况諸β在新賦值中都絕不取值a,既然α最后原子命題賦值a,故知在新賦值中α必取值a.

依数学归納法本引理得証.

既証明了这个引理,可知对"Cpv"中的v如賦以非特指值时一命題恆取值0,則即使对v賦以特指值0时該命題仍永取值0,足見上述的方陣的确滿足定义"$Np = Cpv$"(v任意)了. 故定理1.9得証.

注意,对本定理所述的C方陣,当$n \geqslant 2$时,不可能造出适当的N方陣使得两者配合可以决定M系統. 因为不論N方陣如何构作,均不能适合命題$CCNpqCNqp$. 因該方陣最少有三值,試将q代以0,而将p代以0及$N0$以外的第三值,則有$CCNp0CN0p = C0p = p$而非特指值. 因此尽管本定理所述的C方陣可决定M_0,但却沒有N方陣与之相配以决定M.

此外wgM又是直覚系統,将在下节討論.

上面我們說过,任何一个系統X都有相应的弱普系統wgX. 当X为引否系統时,要决定wgX,可先求出X_0然后再加定义"$Np = CpO$"(但对O不加任何特殊公理)而得. 求X_0(即求某系統X的純C可証命題集)的問題,近来已有許多人探討. 关于M_0, H_0, J_0的已經有了結果,而wgM, wgH, wgJ的問題我們上面已經討論过了.

此外有名的系統是 Lewis 的严格蘊涵系統$S1$—$S5$. C. A. Meredith[1] 諸人曾經致力于$S_0 1$—$S_0 5$的研究,并获得若干具体結果. 不过由于在$S1$—$S5$中我們根本沒有下

列二可証命題：

$$CpCCpqq \text{ 及 } CCpCqrCqCpr$$

因此在 $S1-S5$ 的弱普系統內，全都不能有下列二命題

$$CpNNp \text{ 及 } CCpNqCqNp$$

旣然如此，它們的弱普系統似乎沒有什么特殊价値，因此我們不預备研究它們了.

此外的有名系統还有 Łukasiewicz 的 n 値系統 L^n. 当 $n=3$ 时，Wajsberg 曾加以公理化(見 Łukasiewicz[2]). 但在他的公理化中，并沒有 L_0^3 的公理化. 照本文的作者猜測，L_0^3 可公理化如下：

$$(1)\ CpCqp,\ (2)\ CpCCpqq,\ (3)\ CCpqCCqrCpr,\ (4)\ CCCpCpqpp$$

在其中是可以推出定理 1.2 的三个命題的(仿定理 1.2 处由(2)(3)可得(5) $CCpCqrCqCpr$，分(5)(1)即得 $CCppCqq$.)，因此(由定理 1.3 后的注意)加入公理

$$CCpNqCqNp$$

后，便可以得到 wgL^3 了. 还可証明，若再加入不是普否的公理

$$CNNpp$$

我們便可以得到 L^3 系統本身(极易看見可推出 Wajsberg 的四条公理). 在这个公理化中虽則含有六条公理(比 Wajsberg 的多两条)，但 L_0^3, wgL^3 以及 L^3 可以依次而得，却是它的优点.

还可一提的是 Heyting[1] 所作的一个三値系統(暫时記为 H^3).

C	0	1	2	N
*0	0	1	2	2
1	0	0	2	2
2	0	0	0	0

这系統 Łukasiewicz[1] 曾給以公理化，但他亦沒有把 H_0^3 加以公理化，因此无法从他的公理化而构作 wgH^3. 作者猜測，H_0^3 可公理化如下：

$$CpCqp,\ CCpCqrCCpqCpr,\ CCCrprCCCpqrr.$$

如众周知，在 H_0^3 中(甚至由上述前两个公理)可以推出定理 1.2 中的三个命題(比如，参見作者[1]及所征引論文)，故加入

$$CCpNqCqNp$$

后，即可得 wgH^3. 然后(这也是众所周知的)加入不能普否的公理

$$CpCNpq\ (\text{或 } CNNpCNpp),$$

即可得出系統 H^3. 这样一来，在本公理系統內 H_0^3, wgH^3 与 H^3 也可以依次得出了.

§2　直　覚　系　統

在本文的引言部分，我們已經定义什么叫做直覚关系以及直覚系統. 由于系統 M 的特点(凡在 M 中可推出 α 时亦必可以推出 $NN\alpha$)，我們可对直覚系統下一个更为簡单明确的定义：如果在一个系統 X 內可以推出系統 M 中所有以 N 起首的命題，則 X 叫做直覚系統.

容易看見,不論照引言中的定义或照这里的定义,系統M均是直觉系統之一. 但下文提及直觉系統时,一般只指M以外的直觉系統.

又容易看見,若在任一直觉系統中加入系統M內的若干可証命題,結果仍为直觉系統. 两直觉系統的併系統或共通系統仍为一直觉系統.

把系統M中可証命題的任何一个部分命題均改为它的双重否定,則所得命題旣以N起首,必可在任一直觉系統內推出. 此外,如果把$\bar{C}pq$定义为$NNCNNpNNq$,再把系統M中的可証命題中的"C"改为"$\bar{C}$",由于系統M中各可証命題必以C或N为起首,更改后則以$\bar{C}$或N为起首,要之均以N为起首,因此(更改后的命題)必可在直觉系統內推出. 在这个意义上,可以說系統M中所有可証命題,均可在直觉系統內找到其对应(但推演規則卽使更改后仍未必全可推出,例如"$\alpha, \bar{C}\alpha\beta \to \beta$"便不能推出),因而在某种意义下在每一个直觉系統內存有系統M的某种"模型".

定义. 所有形如$N\beta$, $CNN\alpha_1N\beta$, $CNN\alpha_1CNN\alpha_2N\beta$, $\cdots$的命題叫做甲型命題;所有形如$N\beta$, $C\alpha_1N\beta$, $C\alpha_1C\alpha_2N\beta$, $\cdots$的命題叫做乙型命題. 每个甲型命題显然同时亦是乙型命題. 由于都含有全体$N\beta$形的命題且对分离原則封閉之故,M系統中甲型命題全体或乙型命題全体都組成一个直觉系統.

定理 2.1. 在任何直觉系統中,如果加入公理

(1) $CNNCpqCNNpNNq$

(2) $CNNNpNp$

及規則(子)$C\alpha\beta \to CC\gamma\alpha C\gamma\beta$

則必能推出M系統中所有甲型命題.

証. 由規則子容易推出

(丑)C的可传性 $C\alpha\beta, C\beta\gamma \to C\alpha\gamma$.

(寅$_n$)加头規則 $C\alpha\beta \to CC\gamma_1C\gamma_2\cdots C\gamma_n\alpha C\gamma_1C\gamma_2\cdots C\gamma_n\beta$.

今設在系統M中推出一个甲型命題$CNN\alpha_1CNN\alpha_2\cdots CNN\alpha_nN\beta$(下文就特例$n=3$而討論,一般情形准此),則在$M$中同时又可推出$C\alpha_1C\alpha_2C\alpha_3N\beta$,故直觉系統中必可推出(3) $NNC\alpha_1C\alpha_2C\alpha_3N\beta$. 由分(1)(3)卽得(4) $CNN\alpha_1NNC\alpha_2C\alpha_3N\beta$. 又由(丑)(4)(1)卽得(5): $CNN\alpha_1CNN\alpha_2NNC\alpha_3N\beta$. 由分寅$_2$(1)(5)便得(6) $CNN\alpha_1CNN\alpha_2CNN\alpha_3NNN\beta$. 最后由分寅$_3$(2)(6)便得$CNN\alpha_1CNN\alpha_2CNN\alpha_3N\beta$,这,便是所要求的命題,而定理得証.

定理 2.2. 在任何直觉系統中,如果除加入上定理內所列的(1)(2)(子)以外,还加入

(3) $CpNNp$

(卯)$C\delta\beta \to CC\beta\gamma C\delta\gamma$,

則系統M中所有乙型命題均可由該直觉系統內推出.

証. 設在系統M中推出一个乙型命題$C\alpha_1C\alpha_2C\alpha_3\cdots C\alpha_nN\beta$(下文亦就$n=3$而証明,一般情形准此). 准上定理的証明知該直觉系統內必可推出(4) $CNN\alpha_1CNN\alpha_2CNN\alpha_3N\beta$. 我們知道由卯再应用加头規則寅$_n$,可得

(卯$_n$)$C\delta\beta \to CC\alpha_1C\alpha_2\cdots C\alpha_nC\beta\gamma C\alpha_1C\alpha_2\cdots C\alpha_nC\delta\gamma$.

由(丑)(3)(4)得(5)$C\alpha_1CNN\alpha_2CNN\alpha_3N\beta$. 由分卯$_1$(3)(5)得(6): $C\alpha_1C\alpha_2CNN\alpha_3N\beta$.

由分卯$_2$(3)(6)得 $C\alpha_1 C\alpha_2 C\alpha_3 N\beta$，这便是所求的命題，而定理得証.

注意，上两定理中的規則（子）及（卯）并不属于甲型或乙型的規則，換句話說，应用（子）或（卯）后，并不保証由甲型命題得出甲型命題，由乙型命題得出乙型命題，很可能得出这两型以外的命題来. 因此系統M中所有甲型命題的总体或所有乙型命題的总体虽組成直覺系統，但它們能否公理化，殊属疑問.

現在我們从弱到強作出各种直覺系統.

在下面各系統中，都假定有分离原則. 因此，如果我們假設了公理“$C\alpha\beta$”，我們便有推理規則“$\alpha \to \beta$”，如果假設了公理“$C\alpha C\beta\gamma$”，我們便有推理規則“$\alpha,\beta \to \gamma$”. 反之，如果我們只有規則“$\alpha \to \beta$”或“$\alpha,\beta \to \gamma$”，未必便有 $C\alpha\beta$ 或 $C\alpha C\beta\gamma$. 亦卽从強弱方面說，規則比相应的公理要弱些. 因此，在下面构成一系統时，我們尽量列出規則而不列出公理（捨強取弱）. 不过就一般的习慣言，如果作为基本出发点的話，我們宁可用公理而不愿用規則（在心理上，总覺得“規則”比“公理”复杂得多）. 如果我們不愿多用基本規則，那末我們把各規則（除分离原則外）都改为相应的公理好了.

目前所知道的最弱的直覺系統是由下列公理規則組成：

I1：(1)　如果α为M的公理，則 $NN\alpha$ 为公理.

(2)　$N N\alpha,\ NNC\alpha\beta \to NN\beta$

(3)　$NNN\alpha \to N\alpha$

显然这是一个直覺系統. 这是目前所知道的最弱的了，我們知道，任何直覺系統必滿足(1)，但(2)(3)是否可省，却无法解决了.

在I1中，我們以“$NN\alpha$”形的命題作为公理，旣然直覺系統主要是以N起首的命題，用这种形状的公理似不够好. 为此，我們可改用下列的公理而另成一系統.

I2：(1)　如果α为系統M的公理則 $CC\alpha NsNs$ 为公理，其中 s 为不出現于α表达式中的原子命題.

(2)　$CpNNp$,

(3)　$NN\alpha,\ NNC\alpha\beta \to NN\beta$,

(4)　$NNN\alpha \to N\alpha$.

我們知道，由“分(1)(2)”卽可推出 $NN\alpha$，因而可推出I1的各公理来了. 故I2为直覺系統. 它的公理（甚至于把(3)(4)改成相应的蘊涵公理后）都是乙型命題. 乙型命題經分离原則后仍只得乙型命題（含N）.

因此，在系統I2中，純C命題是沒有的. 为了滿足通常推理的需要，我們应該加些純C命題进去. 究竟应該增加什么呢？当然需根据当时所处理問題的特点而定. 現在只列出两个系統：

I3：在I2的系統上再加入下列的純C命題：

(1) Cpp，(2) $CpCCpqq$，(3) $CCpqCCqrCpr$，(4) $CCpCpqCpq$，

此外并把I2中的規則(3)(4)加強为相应的蘊涵命題.

本文作者認为，这些純C命題是最符合于通常“推出”这个概念的蘊涵命題，它們不包含有“蘊涵怪論”，由它們所推出的任何命題，若把C讀为“推出”，都不会被直覺上認为有任何不妥当的地方（由这四命題所作成的純C系統，作者在 1950 年已經得出，并在一文[2]

中提到．但它們无法与合取詞析取詞配合，因为一經配合后，“蘊涵怪論”又重新出現了，所以作者沒有継續研究它們；現在已可解决这个困难，将另文发表）．

系統I3中的公理除純C公理外，全属乙型命題．所以任一直覚系統如果全部包括了M系統內的乙型命題又包含了上述四个純C公理，則該直覚系統必包括了I3．此外由I3的純C公理极易推出[1]規則（子）（卯），因此I3內显然又包含了系統M中所有乙型命題．因此I3便是具有这种性質的最小系統．

更为重要的系統是：

I4．由I3再加入公理 $CpCqp$．

如众周知，在I3系統再加入$CpCqp$后，由I3中的純C命題即可推出J_0（亦即H_0），即系統J中的純C可証命題，亦即所謂正蘊涵命題．其次在I3中旣能推出M中所有的乙型命題，故必可推出 $CCpNqCqNp$．把最后一命題加到J_0后，即可得出系統J．因此I4是包含整个系統J的．

反过来說，I4中的純C命題是在J系統中的．其次，容易看見，在系統J中我們可以推出規則

$$NNC\alpha_1 C\alpha_2 \cdots C\alpha_n N\beta \to C\alpha_1 C\alpha_2 \cdots C\alpha_n N\beta,$$

$$NNC\alpha_1 C\alpha_2 \cdots C\alpha_n \beta \to C\alpha_1 C\alpha_2 \cdots C\alpha_n NN\beta,$$

因此如果在系統M中有一命題$C\alpha_1 C\alpha_2 \cdots C\alpha_n N\beta$，則在含$J$的直覚系統中必有$NNC\alpha_1 C\alpha_2 \cdots C\alpha_n N\beta$，因而又有 $C\alpha_1 C\alpha_2 \cdots C\alpha_n N\beta$，換句話說，凡含$J$的直覚系統必含有系統$M$的所有乙型命題，因而必含有I4（I4中的含$N$公理全是乙型命題）．因此我們得

定理 2.3. I4是包含J的直覚系統中的最小者．

定理 2.4. I4又可公理化如下：

(1) $CpCqp$

(2) $CCpCqrCCpqCpr$

(3) $CCpNqCqNp$

(4) $CCCNpqNpNp$

証． 因为(3)(4)均为乙型命題，容易看見I4包含了本系統．其次，本系統显然包括了系統J（因J可公理化为(1)(2)(3)），故若要証明本系統即I4，只須証明本系統为直覚系統，而这又只須証明本系統包含I2便够了．

試与I2比較，它的(2)(3)(4)均在系統J之內因而均在本系統之內．至于(1)，即$CC\alpha NsNs$（α为系統M的公理）是否在本系統之內的問題，可如下討論．我們遵照 Łukasiewicz[3]，把系統M公理化为：

$$\alpha_1\colon CCpqCCqrCpr;\quad \alpha_2\colon CCNppp;\quad \alpha_3\colon CpCNpq.$$

今α_1与$NN\alpha_2$既在系統J中，而系統J內又有規則

$$\alpha \to CC\alpha\beta\beta \text{ 及 } NN\alpha \to CC\alpha N\beta N\beta,$$

因此易見 $CC\alpha_1 NsNs$ 及 $CC\alpha_2 NsNs$ 均在本系統內．其次在系統J內又有規則

$$(*)\quad C\alpha C\beta\gamma,\ CCC\gamma\delta ss \to CC\alpha C\beta\delta ss.$$

1) “分(3)”即(卯)．又由分分分(3)(3)(2)(2)可得(5) $CCsCpqCpCsq$，“分分”(5)(3)即(子)．

今 J 中又有命題(5) $CpCNpNq$，故由(*)(5)(4)即得 $CCpCNpqNrNr$，即 $CC\alpha_3NrNr$. 因此可証本系統包含 I2，故为直覚系統，而定理得証.

（注意）在系統 J 內是有命題 $CCCNpNqNpNp$ 的，但系統 J 並非直覚系統，甚至于系統 J 加入新公理 $CCCpNqpp$ 后，仍非直覚系統.（見 I. Johanson[1]）. 注意这两命題与本系統內公理(4)的异同.

第三个重要的直覚系統是

I 5. 在定理 2.4 中把公理(4)加強为 (4°) $CCCpqpp$ 而得.

在 I 5 中(1)(2)(4°)恰巧組成 M_0（系統 M 的純 C 可証命題集），加入(3)后，恰巧組成 wgM. 因此我們得到

定理 2.5. wgM 是一个直覚系統(它就是 I 5)，因而是普否且引否的直覚系統.

注意，在 I 5 中除却正蘊涵命題外，还包含有系統 M 的全部純 C 可証命題，其中有好些是直覚主义者如 Brouwer 等所不承認的. 就含 N 命題言，在 I 5 內可以推出 $CCNppp$，$CCpqCCNpqq$（如依通常办法引入析取詞 Apq，則在 I 5 內还可推出排中律 $ApNp$ 等），尽管在 I 5 里面推不出 $CpCNpq$，$CNNpCNpp$ 等(由 wgM 的鑑定方陣可以驗知)，但它不能被直覚主义者所接受那是显然的.

因此我們发生一个問題，能否找出另外一个普否引否的直覚系統，它比 I 5 弱一些，因而能被一般直覚主义者所接受?

这个問題現在已有了解决，并且是否定的答案. 为此，我們先証下引理.

引理. 在任何一个普否的直覚系統內必可推出所有各直覚系統(包括 M)的全部无 N 命題.

証. 設 X 为任何一个普否的直覚系統. 今先証在 X 內可以推出 Cpp，然后再証在 X 內可推出任何直覚系統的全部无 N 命題.

因在 M 內可以推出 Cpp，故在 X 內若不能推出 Cpp 必能推出 $NNCpp$，因普否之故，又必推出 (1) $CCCppqq$. 今由分(1)(1)即得 Cpp. 換言之，在 X 內必可推出 (2) Cpp.

今設在一个任取的（不矛盾的）直覚系統中可推出一无 N 命題 α，則 M 中必可推出 α 因而 X 中必可推出 α 或 $NN\alpha$. 如推出 α，定理得証. 如推出 $NN\alpha$，因普否之故必可推出 (3) $CC\alpha vv$，而 v 不出現于 α 的表达式中. 今由分(3)(2)即得 α. 故定理得証.

定理 2.6. 在直覚系統中只有一个是普否且引否的，它便是 wgM（即 I 5).

証. 設有两个直覚系統 X，Y 都是普否且引否的，則 X_0 与 Y_0 应相同，又因普否且引否之故，X 与 Y 相同. 依上面所論，除 I 5 外不可能再有其它的普否且引否的直覚系統.

定理 2.7. 任何直覚系統的強普系統或为 I 5 的部分系統或者是矛盾系統.

証. 依引理，該直覚系統的強普系統必含有 M_0. 如果它不是 I 5 的部分系統，它或者多一些不含于 M_0 中的純 C 命題，或者多一些不能普否于 M 中的含 N 命題，普否之后，它仍含有一些不在 M_0 中的純 C 命題. 由于系統 M_0 的完备性可知它必为矛盾系統. 定理得証.

以上由 I 1 至 I 5 均是 I 5 的部分系統. 由于历史上的关系，我們还应該討論一些不是 I 5 的部分系統的直覚系統.

上面已經指出过，在 I 5 中我們并不能够推出 $CpCNpq$ 或 $CNNpCNpp$. 今把凡加入

$CpCNpq$ 于某一直覚系統I的,叫做I_*系統,因而有I_*1至I_*5. 又把加入$CNNpCNpp$于某一直覚系統I的叫做I^*,因而有I^*1至I^*5.

可以証明,$I_*4 = I^*4 = H$. 事实上,I_*4包含H是众所周知的,至于$I^*4 = I_*4$一事,作者[1]又已指出过了. 因此只要指出H包含I_*4(亦即只須証H包含I4),那末这事实便得到証明了.

在系統J中(因而在H中)我們有規則

$$(*) \quad C\alpha\beta,\ CC\alpha\gamma\gamma \to CC\beta\gamma\gamma.$$

今H中既有(1) $CpCNpq$ 及 (2) $CCpNpNp$,故由(*)(1)(2)可得 $CCCNpqNpNp$ 即I_*4中的(4). 可見H包含I4,因而便有$I_*4 = H$.

历史上說来首先証明H为直覚系統的是V. Glivenko[1]. 这里我們所証的可以看作是另一个新証明.

作者在[1]中又已指出,若在系統H中加入$CCCpqpp$后可得系統M,因此容易証明$I_*5 = I^*5 = M$.

此外的I_*1至I_*3及I^*1至I^*3,沒有什么重要,我們不再詳細討論了.

以上各直覚系統,只要是彼此独立的,則求其共通部分,所得的系統亦是直覚系統. 因此我們得:

I6: I5与I_*4的共通系統是一个直覚系統.

I6有下列的性質: 如把M_0中的命題表达式中最后一个部分命題β改写成$CN\beta\beta$,則所得的命題必能在I6中推出.

因为,設M_0中有一命題为(1) $C\alpha_1 C\alpha_2 \cdots C\alpha_n\beta$,則在I5中亦能推出該命題,I5中既又有(2) $C\beta CN\beta\beta$,則由分寅$_n$(2)(1)即得 $C\alpha_1 C\alpha_2 \cdots C\alpha_n CN\beta\beta$.

其次I_*4中既有I4,故必可推出乙型命題(3) $C\alpha_1 C\alpha_2 \cdots C\alpha_n CNN\beta$. I_*4中又有(4) $CNN\beta CN\beta\beta$,故由分寅$_n$(4)(3)即得 $C\alpha_1 C\alpha_2 \cdots C\alpha_n CN\beta\beta$.

I5及I_*4中既同可推出$C\alpha_1 C\alpha_2 \cdots C\alpha_n CN\beta\beta$,故I6中亦可推出,而上述断言得証.

目前我們还不知道的是: I6是否即I4? 如否,I6如何公理化,是否可由加$CCCpqpCNpp$于I4而得? I6是否具有上述性質的直覚系統中最小者?

用公理而确定的直覚系統,重要的大概便是上述这些了. 現在我們再討論由有穷个值的方陣所确定的直覚系統. 容易看見,I5可由三値方陣确定(見前),而由二値方陣所确定的(不矛盾的)系統,除M以外,沒有一个是直覚系統.

一般說来,設把系統M的二値鑑定方陣作下列的更改: 将0分裂为$0_1, 0_2, \cdots, 0_k$,将1分裂成$1_1, 1_2, \cdots, 1_k$,而指定0_i中某一部分(例如$0_1, 0_2$,但非全体)为特指値,其余的則均非特指値,并依照下列办法而定新方陣的值:

$$C0_s0_t \text{ 及 } C1_u0_s \text{ 及 } C1_u1_v \text{ 为某个 } 0_r,\ C0_s1_u = 1_v,\ N0_s = 1_u,$$

$$(s,t,r = 1,2,\cdots,h, \text{ 而 } u,v = 1,2,\cdots,k, \text{可任意选取,但須滿足分离原則}).$$

并規定 $NN0_s$ 及 $N1_u$ 均为新特指値.

显見,这样所規定的新方陣必然决定直覚系統.

作为特例,我們試作出一些由三値方陣所决定的直覚系統,这时可把0分裂为$0_1, 0_2$

而 1 则不分裂，并以 0_1 为新特指値．此外再規定：

$$C\,0_1 0_1 \text{ 及 } C\,10_1 \text{ 及 } C\,11 \text{ 及 } C\,0_2 0_2 \text{ 及 } C\,10_2 \text{ 及 } C\,0_2 0_1 \text{ 及 } C\,0_1 0_2 \text{ 均为 } 0_1 \text{ 或 } 0_2,$$

$$C\,0_1 1 = C\,0_2 1 = 1,\ N\,0_1 = N\,0_2 = 1,\ NN\,0_1 = NN\,0_2 = N\,1 = 0_1.$$

为着満足分离規則起見，我們必須定 $C\,0_1 0_2 = 0_2$，因此可能得到的三値方陣只能有 $2^6 = 64$ 种如下：

C	0_1	0_2	1	N
$*0_1$	$(0_1,0_2)$	0_2	1	1
0_2	$(0_1,0_2)$	$(0_1,0_2)$	1	1
1	$(0_1,0_2)$	$(0_1,0_2)$	$(0_1,0_2)$	0_1

我們并可注意下列事实：

（1）若 $C\,0_2 0_2 = 0_2$，則所定的直覚系統中沒有可証的純 C 命題．因若把各原子命題均賦値以 0_2，得出的値必为 0_2 而非特指値．

（2）要想在所決定的系統中可推出 Cpp，必須采用定义：$C\,0_1 0_1 = C\,0_2 0_2 = C11 = 0_1$，故只可能有 8 个方陣．

（3）要想在所決定的系統中可推出 $CqCpp$，必須采用定义 $C\,0_1 0_1 = C\,0_2 0_2 = C\,11 = C\,10_1 = C\,0_2 0_1 = 0_1$，因此只可能有两个方陣：

C	0_1	0_2	1	N
$*0_1$	0_1	0_2	1	1
0_2	0_1	0_1	1	1
1	0_1	0_2	0_1	0_1

C	0_1	0_2	1	N
$*0_1$	0_1	0_2	1	1
0_2	0_1	0_1	1	1
1	0_1	0_1	0_1	0_1

第一个方陣決定系統 I 5（$=wgM$），第二个方陣乃由 Heyting[1] 所首先作出，它所決定的系統上文叫做 H^3．这两系統上文均討論过了．在这 2^6 个方陣所定的系統中，我們还有下列定理：

定理 2.8. 設由系統 M 的二値方陣作出一个分裂方陣，如果由 0 分裂的非特指値中有一値 a 及由 1 分裂的非特指値中有一値 b 使得：对任何由 1 分裂的（非特指値）e 而言，Cea 及 Ceb 均为特指値．那末由該新方陣所決定的系統必具有下列性質：若在新系統中推出一命題 $CC\alpha pp$，p 为原子命題，則在系統 M 中必可推出 α．

証． 若在 M 中不能推出 α，則必有一賦値使 α 取値 1．今对新方陣作相应的賦値如下：刚才賦以 1 的原子命題今賦以 b，刚才賦以 0 的原子命題今賦以 a．既然刚才 α 取値 1，現在 α 必取由 1 分裂的値設命之为 e．这时不管 p 賦以 a 或賦以 b（如 p 不在 α 中出現，我們可随卽賦以 a 或 b），依假設 Cea（Ceb）必取特指値設为 d，为満足分离原則起見，Cda 或 Cdb 均不能为新特指値，因此 $CC\alpha pp$ 必不能在新系統中推出．依反証法本定理得証．

在上述 64 个方陣中，凡規定 $C\,11 = C\,10_2 = 0_1$ 的，其所決定的系統均具有本性質（共 16 个系統）．

由于任意两个直觉系統的併系統或共通系統仍为一直觉系統，故把这些新系統以及以前所得的直觉系統求其併系統或共通系統，可得种种新的直觉系統．在特例，I 5 与 H 的共通系統或併系統可由九値方陣而定之．

此外，正如系統 $wgM(=\text{I }5)$ 可定义为系統 M 与一个二値方陣系統的共通系統，同样，由 M 及各种直觉系統与下列的三値方陣系統的共通系統亦是一个直觉系統：

C 方陣照上列 64 个方陣之一定义．

$$N(0_1, 0_2, 1) = (0_1, 0_1, 0_1) \text{ 或 } (0_1, 1, 0_1).$$

这些方陣均滿足 $N1 = 0_1$ 及 $NN\,0_1 = NN\,0_2 = 0_1$，故在这些方陣所定系統中，都可以推出 $N\alpha$（当 $N\alpha$ 在 M 中时）及 NNp（p 为原子命題）来，因此它們与 M 或与直觉系統的共通系統必是一直觉系統．

四値以上方陣准此討論，今不贅．

我們旣然作出这么多的直觉系統，究竟那一系統是最适合的呢？这当然看所处理的問題的具体要求而定．我們只提出几点意見如下．

系統 H $(= \text{I}_* 4)$ 是迄今为止唯一被使用的直觉系統．但由它可推出命題 $CpCNpq$，这命題不能普否于任何系統之中．事实上，I. Johanson 即不滿意于这个命題．

$wg\,M$ $(=\text{I }5)$ 沒有上述的缺点，但它本身又可推出一些命題为一般直觉主义者所不承認．

这两系統的共通部分 I 6 当是較为合适的．

一般說来，J 系統的命題是一般所公認的，J 系統以外的命題則是一般都覚得有問題的．照这标准說来，最合理想的直觉系統該是包含 J 系統的最小的直觉系統，即 I 4．太弱了不够用，太強了便会含有可疑的命題．

如果有人还覚得 I 4 中的 $CpCqp$ 是属于蘊涵怪論之一，觉得"怪"，不愿采用，那末可采用 I 3，它应是最合理想的了．

本文作者是傾向于采用 I 3 的．

§3 共 否 系 統

今后以 $N^0\alpha$ 表示 α，而 $N^{i+1}\alpha$ 表示 $N(N^i\alpha)$．在 α 的表达式中如果开首的符号非 N 时，我們說 α 是一个肯定命題．

命題 α 与 $N\alpha$ 名曰彼此互相否定．在一系統 X 中如果可以推出命題 $N^i\alpha$，我們說 X 直接否定了 $N^{i+1}\alpha$，当 $i \geqslant 1$ 同时又直接否定了 $N^{i-1}\alpha$．若把命題 β 加入 X 后可以在 X 中推出两命題 γ 及 $N\gamma$，我們說 X 間接地否定了 β．

如果两命題 α，β 所否定的命題完全一样，則 α 与 β 必須相同．如果两系統直接否定了同样的命題，这两系統未必相同，例如，古典系統与直觉系統便直接否定了完全同样的命題．至于間接地否定了同样命題的两系統，更不必相同了．在討論具有这样关系的系統之前，我們先給一些定义．

定义．具有規則"$\alpha \to N^4\alpha$"的系統叫做可开展系統．具有規則"$\alpha \to N^2\alpha$"的系統，叫做強开展系統．

具有規則"$N^3\alpha \to N\alpha$"的系統叫做可归約系統．具有規則"$N^2\alpha \to \alpha$"的系統叫做強

归約系統.

定理 3.1. 一系統，不論开展的或归約的，如果它可推出 $N^i\alpha$ 时，它必然否定 $N^j\alpha$，这里 i, j 的奇偶性相反.

証. 試将 $N^i\alpha$ 加到該系統去. 設 $i > j$，則 $i = j + 2k + 1(k \geqslant 0)$. 若該系統为开展的，則把 $N^i\alpha$ 开展得 $N^{i-1}\alpha$ 或 $N^{i+1}\alpha$，視 k 为偶或奇而定，要之均得一矛盾（与 $N^j\alpha$ 矛盾）. 若該系統为归約的，則将 $N^i\alpha$ 归約結果得 $N^{j+1}\alpha$ 亦矛盾. $i < j$ 时仿此得証.

因此我們可以說，两系統（設同为开展或同为归約或其一开展另一归約）如要能够（直接地或間接地）否定同样的命題，其充分条件是：当其一系統推出一命題 $N^i\alpha$ 时另一系統可推出某一命題 $N^k\alpha$，而 i, k 奇偶性相同（这条件可能也是必要但尙未能証明）. 由于这事实的启发，我們作出下列定义：

定义. 如果在两系統之一內可推出一命題 $N^i\alpha$ 时，另一系統內必可推出某一命題 $N^k\alpha$，而 i,k 奇偶性同，則說該两系統为共否系統[1].

显然共否关系是自反的、对称的和可传的. 它又显然是直覚关系的推广. 此外还有下列的簡单性質.

(1) 設 X 是开展的，則 X 与 Y 为共否系統的必要条件是：当在 Y 內推出命題 α 时，对于每一个充分大的 n，在 X 內均可推出 $N^{4n+2}\alpha$ 或 $N^{4n}\alpha$（若 X 为強开展，恆可推出 $N^{4n+2}\alpha$）.

(2) 設 X 是归約的，則 X 与 Y 为共否系統的必要条件是：当在 Y 內推出命題 $N^{2i+1}\alpha$（α 为肯定命題）时在 X 內可推出 $N\alpha$；在 Y 內推出命題 $N^{2i}\alpha$（α 为肯定命題）时，在 X 內可推出 $NN\alpha$ 或 α（如 X 为強归約，則恆可推出 α）.

(3) 两个強开展（或強归約）的共否系統，其共通系統仍为两者的共否系統，并且仍是強开展（強归約）的.

(4) 在所有強归約的共否系統之間有一个最小的共否系統，它为所有的強归約共否系統的共通部分，它的可証命題均呈“α”形或“$N\alpha$”形（α 为肯定命題）. 开展（或強开展）的共否系統中，沒有最小的存在.

(5) 最大的共否系統是存在的，它是一切共否系統的倂集，它又是強开展的而且強归約的.

(6) 在最大的共否系統与某一个共否系統之間，有上节所討論的直覚关系存在.

(7) 若不用“NN”为起首符号的公理，我們不能作出两个都是強归約的共否系統.

（因为，試設 X, Y 都是強归約的. 如果 X 的公理均呈 α 或 $N\beta$ 形，而 α 及 β 为肯定命題，則在 Y 中必可推出某些 $N^{2i}\alpha$ 及 $N^{2j+1}\beta$，因 Y 为強归約之故又必推出 α 及 $N\beta$. 故 X 內的公理在 Y 內均可推出，同理 Y 內的公理在 X 內均可推出，故两者相同）.

如果一系統是由有穷值方陣所决定的，則用下法可得出任意多个共否系統：将每一值分裂为若干个值（可为一个，即不分裂），由非特指值所分裂的为非特指值，由特指值分裂的有一部分为特指值，又必有一部分为非特指值. 如果依原方陣計算由某值得出某值，則依新方陣計算时，由相应分裂值得出的必是相应的分裂值之一. 而規定 N 方陣时除上条件外还要求：有一正整数 h，使得由特指值所分裂出来的任一值 k 恆有 $N^{2h}k =$ 新特指值；

[1] 即使两系統为共否系統，如有一系統非开展亦非归約系統时，該两系統未必否定（直接或間接）同样的命題. 这点必須注意.

规定 C 方陣时也須注意分离原則需継續成立. 显然这样我們便得到一个共否系統了. 其具体做法見上节直覚系統处,此处不贅.

現在討論由公理及分离原則所决定的系統.

定理 3.2. 如果在系統 X 內,对于每一对 k, l 均有 m 使得下列規則(今后叫做广义分离規則)成立

$$N^{2k}\alpha,\ N^{2l}\,C\alpha\beta \rightarrow N^{2m}\,\beta,$$

則由該系統增加公理 $N^{2i_1}\gamma_1, \cdots, N^{2i_s}\gamma_s$ 所得的系統与增加公理 $N^{2j_1}\gamma_1, \cdots, N^{2j_s}\gamma_s$ 所得的系統必为共否系統.

証. 易見在其一系統內推出 $N^i\alpha$ 时在另一系統內必可推出某个 $N^j\alpha$, 而 i, j 奇偶性同,故定理得証.

由这定理易見,如果含有广义分离規則的一个系統內可以推出 $N^{2i}\alpha$ 而不能推出 α,則加入 α 后可以得一个比原系統为強的共否系統. 反之, 如果把某一公理 α 改为 $N^{2i}\alpha$ 后而不影响广义分离原則的継續成立,則改用 $N^{2i}\alpha$ 作新公理后,可得一新共否系統. 如果 i 可随卽选取,我們更得任意多个共否系統.

例 1. 如众周知[1)], 在系統 J 中可以推出 $NNCCNppp$ 而不能推出 $CCNppp$, 系統 J 又是具有广义分离原則的(m 可恆取为 1). 因此加入 $CCNppp$ 后, 可得一个比 J 为強的共否系統. 在这新系統中可推出 $CCCpNqpp$, 但推不出 $CCCNpqNpNp$, 又推不出 $NNCNNpp$, 更推不出 $CNNpp$. 故非直覚系統(这系統曾得 Johanson[1] 及 Curry[1] 的注意).

例 2. 在 wgL^3 中容易証明 Np 与 $CpNCqq$ 是可以互換的(由 L^3 的方陣可以驗知它可推出定理 1.2 的四个命題), 因此容易从命題 $CCCpCpqpp$ (将 p 代以 $NCqq$, 将 q 代以 p 便得) 而推出命題 $NNCNCqqCNCqqp$, 但在 wgL^3 內却不能推出 (由方陣驗証) $CNCqqCNCqqp$. 故把后命題加入 wgL^3 后,可得一个較 wgL^3 为強的共否系統.

在下列的情况下,我們可以不必用 $N^{2i}\alpha$ 形的公理.

定理 3.3. 在一个具有广义分离原則的系統內,如果可以推出下列命題及規則:

(1) $CpN^{2i}p$ (i 适当值 $\neq 0$),

(*) $\alpha \rightarrow N^{2j}CC\alpha NpNp$,

則在該系統中,加入 δ 以及加入 $CC\delta NpNp$ (δ 任意,但 p 不出現于 δ 的表达式中)所得的两系統是共否系統.

証. 在前系統內可推出 δ 因而推出 $N^{2j}CC\delta NpNp$.

在后系統內可推出(2) $CC\delta NpNp$, 由分(2)(1)得 $N^{2i}\delta$.

依上定理可見两系統是共否系統.

例 3′. 在下系統:

(1) Cpp, (2) $CpCCpqq$, (3) $CCpqCCqrCpr$, (4) $CCpNqCqNp$

中由分(4)(1)可得 (5) $CpNNp$ 又分(2)卽得下規則 $\alpha \rightarrow CC\alpha\beta\beta$. 此外我們还可以推出

---

1) J 內有 (1)$CpCqp$ (2) $CpCCpqq$ (3) $CCpqCCNpqNNq$, 由分分(3)(1)(2)卽得 $NNCCNppp$. 至于本例內其它的討論,可参見 Johanson[1].

广义分离原則(其中 $m = k + l$)[1]. 因此对它加入 δ 与加入 $CC\delta NpNp$ (δ 任意)，可得两个共否系統(后者較弱). 在特例，若加入 $CpCqp$ 及 $CCpCpqCpq$ 可得系統J，故若加入 $CCCpCqpNrNr$ 及$CCCCpCpqCpqNrNr$ 可得系統 J 的(但比系統 J 为弱)共否系統.

例 4. 在例 3 的系統中，如果加入 $CpCqp$ 及 $CCCpCpqpp$，可得 wgL^3. 故若加入 $CCCpCqpNrNr$ 及 $CCCCCpCpqppNrNr$，可得 wgL^3 的(但較弱的)共否系統. 又在 wgL^3 中若加入 $CNNpp$ 可得 L^3，故若在 wgL^3 或其共否系統中加入 $CCCNNppNqNq$，則可得 L^3 的(較弱的)共否系統.

我們再从普否及引否的观点来討論共否系統.

定理 3.4. 如果一系統X中可以推出命題 N^iCpp，則它的任何一个普否的共否系統 Y 中，或开展的或归約的，都可推出所有各共否系統的无N命題.

証. 在該系統X內旣可推出 N^iCpp，則在它的共否系統Y內必可推出 $N^{i+2h}Cpp$，而在普否的共否系統Y內更可推出(1) $C^{i+2h+1}ppq\cdots q$，其中 q 出現 $i+2h$ 个. 由分(1)(1)卽可推得 (2)Cpp.

今設在某一个共否系統中推出一无N命題α，則該普否的共否系統Y內必推出 $N^{2k}\alpha$. 今分两情形討論.

如果Y是归約的，則它必可推出 $NN\alpha$ 或 α. 如推出 α 則定理得証. 如推出 $NN\alpha$，因普否之故，它又可推出 (3) $CC\alpha pp$，其中 p 不出現于 α 的表达式中. 由分(3)(2)得 α.

如果Y是开展的，今将 Cpp 加以开展得 $N^{2k}Cpp$ (或 $N^{2k-2}Cpp$，証法同)，因普否之故，它必可推出 $(N^{2k}\alpha)'$，卽 (4) $C^{2k}\alpha p\cdots p$ (共 $2k$ 个 p)，又推出$(N^{2k}Cpp)'$ 卽 (5) $C^{2k+1}ppq\cdots q$ (共 $2k$ 个 q). 由分(5)(4)卽推出α. 故定理得証.

定理 3.5. 如果在一系統中可推出 N^iCpp，則它的普否且引否的共否系統，开展的或归約的，不能多于 1 个.

証. 注意普否引否系統由其无N命題唯一地决定，并利用前定理卽得証.

这里須注意的一点是：普否的共否系統未必存在.

定理 3.6. 一系統X有普否的共否系統的必要条件是：当在X中可推出一命題α时，同时亦可推出某个 $N^{2j}(N^{2k}\alpha)'$，其中 j, k 为正整数或 0，可随命題α而变化.

証. 設X有一个普否的共否系統 Y. 在X中旣推出了 α，Y 中应可推出某个 $N^{2k}\alpha$，因 Y 为普否，Y 中应可推出 $(N^{2k}\alpha)'$，X 旣与Y共否，X 应可推出某 $N^{2j}(N^{2k}\alpha)'$，故条件为必要而定理得証.

注意，当X适合条件时，如果取所有的 $N^{2k}\alpha$ 及 $(N^{2k}\alpha)'$ 而能够組成一系統Y (例如，它至少对分离原則封閉)，卽得X的普否的共否系統. 这时条件亦为充分.

要把每个可証命題都来检查，事实上是办不到的，故本定理几乎无用.

对于由公理所决定的系統，在很特殊的情形下，可用下法检查.

定理 3.7. 如果系統X具有广义分离原則且对每一个公理α言，該系統內均可推出命題 $N^{2j}(N^{2k}\alpha)'$，則当由諸 $N^{2k}\alpha$ 及 $(N^{2k}\alpha)'$ 作为公理組成的系統亦具有广义分离原則且

---

1) 由定理 1.2 处知可推出 (6) $CCpCqrCqCpr$，由分分 (6)(3)(5) 得 (7)$CCpqCpNNq$，由分分 (3)(7)(4) 得 (8) $CCpqCNqNp$. 由分分 (3)(8)(8) 得 (9) $CCpqCNNpNNq$，継續可得 (10) $CCpqCN^{2k}pN^{2k}q$，由分分 (3) 分 (6)(10)(10) 即得相应結果.

为普否系統时,它便是X的普否的共否系統.

其証是显然的. 注意当检查新系統是否普否系統时,不但看它的公理能不能够普否,还要看它的基本规则能不能够普否(如沒有含N的基本規則,則不必检查,因而簡便得多).

例 5. 当系統J加入 $CCNppp$ 后,它显然有一个普否的共否系統(即J系統,因J系統本身可推出 $NNCCNppp$). 容易驗証,新系統是滿足本定理的条件的.

例 6. 在下列公理所决定的系統

(1) Cpp, (2) $CpCCpqq$, (3) $CCpqCCqrCpr$, (4) $CCpCpqCpq$,

(5) $CCpNqCqNp$, (6) $CNNpp$

中,不能推出 $N^{2j}(N^{2k}CNNpp)'$ (不管j, k为何), 故它不可能有普否的共否系統. 这可以如下証明.

由于有命題(6)之故, 在这系統內如能推出随便一个 $N^{2j}(N^{2k}CNNpp)'$, 都必然又推出 $(N^{2k}CNNpp)'$ 即 (7) $C^{2k+3}pvvpv\cdots v$. 由分(3)(2)可得 $CCCCpqqqCpq$, 即有三个q作尾巴时可改为一个q作尾巴. 用此法逐步把(7)縮短尾巴可得 (8) $C^5\,pvvpvv$. 而这命題显然是在本系統內推不出的,这可由下方陣証明.

C	1	2	3	N
*1	1	3	3	3
*2	1	2	3	2
3	1	1	1	1

这方陣完全滿足上列六个命題,但对(8)言則有

$$C^5\,233233 = C^4\,33233 = C^3\,1233 = C^2\,333 = C\,13 = 3\text{(非特指值)}.$$

故本断言得証.

注意. 本例所述系統中的純C可証命題便是上文直觉系統 I 3 中所加入的純C命題,而(5)是用以作出相应的引否普否系統. 可見在(1)—(5)的系統中,如果加入(6), 結果所得的系統便不可能有普否的共否系統了.

§4 仿模态系統及共△系統

在§1中我們指出 wgM 可借通常的二值方陣与另一組二值方陣(其N方陣定义为 $N(0,1)=(0,0)$)相交而得. 如果我們作定义 $N(0,1)=(1,1)$,則这个新方陣系統与M系統的共通系統是什么呢? 今后把这个系統叫做$T\,1$, 它为下面所論的仿模态系統之一.

定理 4.1. 如果在M中可推出一命題α, 則在$T\,1$中必可推出$CN\alpha\alpha$; 反之,若在$T\,1$中可推出$CN\alpha\alpha$, 則在M中必可推出α.

証. 如果在M中可推出α, 根据M中的規則"$\alpha\rightarrow CN\alpha\alpha$", 故在$M$中可推出$CN\alpha\alpha$. 又在新方陣中, "$Np$"恆取値 1, 故"$CNpp$"恆取特指値 0. 易見两者的共通系統$T\,1$中必可推出 $CN\alpha\alpha$. 反之, 若在$T\,1$中可推出$CN\alpha\alpha$, 則在M中亦可推出,再根据M中的規則"$CN\alpha\alpha\rightarrow\alpha$", 故在$M$中可推出$\alpha$. 定理得証.

我們知道,在所有直觉系統(除M外)中,可有 $CpNNp$(矛盾律)必有 $NN\alpha$(α为M中可

証命題)，必沒有 $CNNpp$ (排中律)，而在 $T1$ 中，必有 $CNNpp$，必沒有 $CpNNp$ 及$NN\alpha$．今作定义．

定义．若M中可推出一命題 α 时，在系統X中恆可推出 α 或 $CN\alpha\alpha$；反之，在X中可推出 α 或 $CN\alpha\alpha$ 时，在M中恆可推出 α，則X叫做仿模态系統[1]．

若把 $CN\alpha\alpha$ 記为 $\Delta\alpha$，而把"Δ"与"N^2"相当，則仿模态系統与直觉系統在形式上尤觉相似．因此，仿上方法容易証明下列定理．

定理 4.2. $T1$ 有一鑑定方陣如下：

C	0	1	2	3	N	或 N
*0	0	1	2	3	3	3
1	0	0	2	2	3	2
2	0	1	0	1	1	3
3	0	0	0	0	1	2

这亦是用求两方陣之积而作出的．由于M有种种鑑定方陣，故$T1$系統亦然．不过就上面定理 1.9 所用的方陣言我們却找不到任何N方陣与它相配而組成$T1$的鑑定方陣，这却是与系統 wgM 不同之处．

定理 4.3. $T1$ 可以公理化如下：

$$CCCpqrCCrpCsp;\quad CCNpqCNqp.$$

定理 4.4. 普否的仿模态系統是不存在的．

証． 先証該普否系統中必可推出 Cpp．因在M中是可推出 Cpp 的，故該仿模态系統中必可推出 Cpp 或 $CNCppCpp$．　若推出 Cpp 那便成了．若推出 $CNCppCpp$，因普否之故，又可推出 (1) $CCCppqCpp$．由分(1)(1)可得(2) $CCppCpp$，由分(1)(2)可得(3) Cpp．

其次，設M中推出一无N命題 α，則該仿模态系統中或推出 α (那便成了)，或推出 $CN\alpha\alpha$，由于普否之故又可推出(4) $CC\alpha q\alpha$ (q 不出現于 α 表达式中)．由分(4)(3)得 α，即M中所有无N命題均可在該普否的仿模态系統中推出．

最后，M中可以推出 $CNNpp$，故在該系統中应可推出 $CNNpp$ 或 $CNCNNppCNNpp$，因普否之故还应可推出它們之一的普否命題．容易驗証該两命題的普否命題均不在 M_0 中，把它們任何一个加到系統 M_0 去均导致矛盾．定理得証．

我們可以作出由有穷値方陣所决定的仿模态系統．仍用分裂方法，各种規定与前节同，只是条件"$NN0_s$ 及 $N1_u$ 均为新特指値"一項須改为"$CN0_s0_s$ = 新特指値"罢了．今不多贅．

我們又可作出由公理决定的仿模态系統，$T1$ 是其一例，此外的例为：

定理 4.5. 下列公理决定一个很弱的仿模态系統：

(1) 如 α 为M的公理，則采 $\Delta\alpha$ 为公理．

(2) $\Delta C\alpha\beta, \Delta\alpha \rightarrow \Delta\beta$(或加強为 $C\Delta CpqC\Delta p\Delta q$)．

---

1) 因通常把"必然 α"定义为"$CN\alpha\alpha$"，表面看来两者相似之故．

如果我們不希望采用 $\Delta\alpha$ 形的公理，可用下系統.

定理 4.6. 下列的公理决定一个仿模态系統：

(1) $CpCCpqq$ (2) $CCpqCCqrCpr$ (3) $CCpCpqCpq$

(4) $CpCqp$ (5) $CCpqCNqNp$ (6) $CNNpp$.

証. 我們先証：对 Łukasiewicz[3] 所作的关于系統M的三个公理 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 言，在这系統內可以推出 $\Delta\alpha_1, \Delta\alpha_2, \Delta\alpha_3$.

首先由(4)可得規則"$\alpha\rightarrow CN\alpha\alpha$" 卽(辰)"$\alpha\rightarrow\Delta\alpha$"，而(2)旣为 α_1，故由(辰)(2)可推出 $\Delta\alpha_1$.

由(1)(2)容易推出(寅$_n$) "$C\alpha\beta\rightarrow CC\gamma_1C\gamma_2\cdots C\gamma_n\alpha C\gamma_1 C\gamma_2\cdots C\gamma_n\beta$"，因此由分分(2)(4)(5)得 (7) $CpCNpNq$，由分分(2)(7)(寅$_2$) (6) 得 (8): $CpCNpq$，再由(辰)(8)得 $\Delta\alpha_3$.

由(2)可推得(巳): "$C\alpha C\beta\gamma, C\delta\beta\rightarrow C\alpha C\delta\gamma$"，故由(巳)(3)(5)可得 (9): $CCNpqCCpqCNqq$. 再由分分(9)(2)(4)可得 $CNCCNpppCCNppp$ 卽 $\Delta\alpha_2$.

故就M系統的三公理 α_i 言，这系統內均可推出其相应的 $\Delta\alpha_i$ 了. 还須再証可以推出規則: "$\Delta C\alpha\beta, \Delta\alpha\rightarrow\Delta\beta$".

由(1)(2)可推得(午): "$C\alpha C\beta\gamma\rightarrow C\beta C\alpha\gamma$". 今命 $\Delta C\alpha\beta$ 为 (10)，$\Delta\alpha$ 为 (11). 則(10)可写为 $CNC\alpha\beta C\alpha\beta$. 由分分(2)(5)寅$_2$(6)可得 (12): $CCNpqCNqp$. 由分分 (2)午(10)(12)可得(13): $C\alpha CN\beta C\alpha\beta$. 由午分分(2)午(13)(3)得(14): $C\alpha CN\beta\beta$. 又由分(3)分(2)午(14)(5)得(15): $CN\beta N\alpha$. 最后由分(3)分分(2)分分(2)(15)(11)(13) 卽得 $CN\beta\beta$ 卽 $\Delta\beta$. 因此便推出了規則 "$\Delta C\alpha\beta, \Delta\alpha\rightarrow\Delta\beta$". 依据上定理本定理便得証.

此外还有很多与直覚系統相平行的推論，今不贅.

現在只想指出，我們亦可推广仿模态系統的概念：

定义. 設有两系統，若在其一系統中推出一命題 $\Delta^i\alpha$ $(i\geqslant 0)$时，另一系統內恆可推出命題 $\Delta^k\alpha$ $(k\geqslant 0)$，則説該两系統为共Δ系統.

这显然是仿模态系統的推广而与共否系統平行. 但由于Δ运算比之 NN 运算要复杂得多，故共Δ系統与共否系統究竟相似到什么程度，迄今尙未能决定. 但我們却可証下列的重要結果.

定义. 若在一系統內可推出規則 "$\alpha\rightarrow\Delta\alpha$"，該系統名曰可$\Delta$开展系統，若可推出規則 "$\Delta\Delta\alpha\rightarrow\Delta\alpha$"，則該系統名曰可$\Delta$归約系統.

定理 4.7. 若在系統X中可推出命題 Δ^iCpp $(i\geqslant 0)$，則在它的可Δ归約的普否的共Δ系統Y中可以推出所有X的共Δ系統中的无N命題.

証. 在X中旣可推出 Δ^iCpp，則它的共Δ系統Y中必可推出 Δ^kCpp，若 $k>1$，再Δ归約卽推出 ΔCpp，因普否又推出 (1) $CCCppvCpp$. 由分(1)(1)可得 (2) Cpp. 若 $k=1$，仿上得 Cpp，若 $k=0$，則 Δ^kCpp 卽已为 Cpp. 其次，設X的任一共Δ系統中有一无N命題 α，則在共Δ系統Y中可推出 $\Delta^k\alpha$，若 $k>1$，再Δ归約可推出 $\Delta\alpha$，因普否又推出 (3) $CC\alpha v\alpha$ (其中 v 不出現于 α 的表达式中). 由分(3)(2)卽得 α，若 $k=1$，仿上得 α. 若 $k=0$，則 $\Delta^k\alpha$ 卽已为 α. 故定理得証.

定理 4.8. 若在系統X中可推出命題 Δ^iCpp $(i\geqslant 0)$，則它的普否及引否的可Δ归約

的共△系統不可能多于一个.

証. 仿前. 但是鉴于普否的仿模态系統不存在，則普否的共△系統是否存在殊属疑問.

关于可△开展的共△系統是否具有本定理所述性質，今倘未知.

参 考 文 献

沈有鼎： 初基演算，数学学报 7 (1957), 132—142.

莫紹揆 [1] 命题演算的公理系統，数学学报，5 (1955), 117—135.

[2] (Moh Shaw-Kwei) The deduction theorems and two new logical systems, *Methodos*, 2 (1950), 56—75.

Brouwer, L.E.J., Intuitionism and formalism (English translation), *Bulletin of American mathmatical Society*, 20 (1913—4), 81—96.

Curry, H. B., Leçons de logique algébrique, 1952.

Glivenko, V., Sur quelques points de la logique de M. Brouwer. Acad. Belg., *Bull. des science*. 5ième ser. 14 (1928), 183—188.

Heyting, A., Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Phys.—math. Klasse, 1930, pp. 42—56.

Hilbert, D., und Ackermann, W., Grundzüge der theoretischen Logik, 3te Aufg., 1949.

Johanson, J., Die Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischen Formalismus, *Comosito mathematica*, 4 (1936).

Колмогоров, A., O principia tertium non datur, *Матем. сб.* 32 (1925).

Łukasiewicz, J., [1] Die Logik und das Grundlagenproblem. Les entretiens de Zürich, 1938. Zürich, 1941.

[2] The shortest axiom of the implicational calculus. of propositions. *Proc. Roy. Irish Acad. Sect A*, 52 (1948).

[3] Aristotle's Syllogistic, 1951.

Łukasiewicz, J. und Tarski, A., Untersuchungen über den Aussagenkalkül. Compte Rendu des séances de la société des sciences et des lettres de Varsovie. XXIII, 1930, Klasse III.

Lemmons, E. J., Meredith, C. A., etc. *Calculi of pure strict implication.* (油印本,1957)

Schütte, K., Uber einen Teilbereich des Aussagenkalküls. Compte Rendu des séances de la société des sciences et des lettres de Varsovie, XXIV, 1933, Klasse.

N-GENERALIZABLE, INTUITIONISTIC, CO-DENIAL, PSEUDO-MODAL AND CO-Δ SYSTEMS

Moh Shaw-kwei
(*Nanking University*)

Abstract

A fundamental view point of intuitionistic logicians is that the law of exclude middle is not admissable while not deniable (Cf. "the absurdity of absurdity of the law of exclude middle"). It was A. H. Колмогоров who first formalized such a system, and then came A. Heyting. The two systems developed by them are not identical. The former system (the system J) possesses the following property: If we transform an asserted proposition in the traditional two-valued system (the system M) by doubly negating each of its components, then the resulting proposition is deducible in the system J (the converse is obviously true). The latter system (the system H) possesses the property: If a proposition is deducible in the system M, then its double negation is deducible in the system H; and if the negation of a proposition is deducible in M, then the same is true for H; and conversely. From the point of view of Brouwer, the system H is more satisfactory. Hence, although criticized by some logicians, the system H is considered the sole intuitionsistic system so far developed.

However, there are many other logical systems which bear the same relation with the system M as the system H does. Such systems will be called intuitionistic systems, In the present paper we give many of such systems. In discussing them we find that some of them (e.g. the systems $I3$ and $I4$) are more satisfactory than H (see §2).

Intuitionistic systems will be generalized to co-denial systems (see §3). Parallelly we develop pseudo-modal systems and co-Δ systems (see §4).

As was found by J. Johanson, the system J is N-generalizable. By means of the concepts N-generalizability and N-introducibility we discuss some important properties of various logical systems. (see §1).

Beside obtaining thus various properties of some important systems, we prove the following theorems:

Among the intuitionistic systems, the co-denial systems, the pseudomodal systems or the co-Δ systems, there exists at most one which is N-generalizable and N-introducible.

Every intuitionistic system contains (in a certain sense) the whole asserted propositions of the systme M, yet none of them contains also all the rules of procedure of the system M (except, of course, the system M itself).

第9卷 第4期 数 学 学 报 Vol. 9, No. 4
1959 年12月 ACTA MATHEMATICA SINICA Dec., 1959

关于分析学中的近似方法的一般图式*†**

林 群
(中国科学院数学研究所)

Л. В. Канторович[1] 利用泛函分析的观点建立了分析学中的近似方法的一般图式. 在本文 §1 中把 [1] 中的近似方程的"近似"的意义作了簡化，并以更簡捷自然的方式作出积分方程的各种近似方法. 在 §2 中把 [1] 的結果作稍稍的簡化，也减少一些限制；并将有关 С. Г. Михлин[3] 的某些結果納入 Канторович 的图式中.

§1. 第二种方程的近似方法

近似地解积分方程

$$x(s) - \lambda \int_0^1 H(s, t)x(t)dt = y(s) \tag{1}$$

的最流行的方法乃是按照某一"机械求积公式"把方程中的积分項替代为有穷和:

$$\int_0^1 H(s, t)x(t)\,dt \approx \sum_{k=1}^{n} A_k H(s, t_k)\, x(t_k),$$

并且对于代数方程組

$$\tilde{x}(t_i) - \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k\, H(t_i, t_k)\, \tilde{x}(t_k) = y(t_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{2}$$

来求解. 所得的解(即 n 个值 $\tilde{x}(t_i)$)通过某一插值法得到的函数,例如是

$$\lambda \sum_{k=1}^{n} A_k\, H(s, t_k)\, \tilde{x}(t_k) + y(s),$$

就取作(1)的近似解.

我們要探討的是: (1) 的可解性与(2)的可解性之間的关系，以及如果二者都可解，近似解的收斂于精确解，以及收斂的阶.

以下在泛函方程的一般形式下来考察这个問題.

I. 一 般 理 論

在賦范綫性空間 X 中給定方程

$$Kx = x - \lambda Hx = y, \tag{3}$$

其中 $x, y \in X$, $H \in (X \to X)$[1], λ 是参数.

在 Banach 空間 $\bar{X}$ 中作"近似方程"

* 1958年10月20日收到.
† 本文有一摘要曾发表在"科学記录 2:3 (1958)"上，兹加修整与詳述.
** 作者深深地感謝他的导师关肇直先生对于本拙作的极其耐心的指导与帮助! 并感謝陶鋸同志的許多帮助!

1) $H \in (X \longrightarrow X)$ 表示 H 是由空間 X 到空間 X 中的有界綫性算子.

$$\bar{K}\bar{x} = \bar{x} - \lambda\varphi\bar{H}\bar{x} = \psi y, \tag{4}$$

其中 $\bar{x}\in\bar{X}$, $\bar{H}\in(\bar{X}\to X)$, $\varphi, \psi\in(X\to\bar{X})$. 并設 $\varphi\bar{H}$ 是全連續的算子.

如果 $\bar{x}^*$ 是(4)的解,我們取

$$\lambda\bar{H}\bar{x}^* + y$$

作为(3)的近似解. 以 x^* 表示(3)的(精确)解.

現在要研究的是:(3)的可解性与(4)的可解性之間的关系,以及如果二者都可解,近似解的收斂于精确解,以及收斂的阶.

为此,我們假設 $\bar{H}$ 与 H 之間有着如下的"近似"关系:

(I) $$\|(H-\bar{H}\varphi)\bar{H}\|\leqslant\varepsilon.$$

註 1. 关于 $\bar{H}$ 与 H 之間的"近似"关系,有着不同的定义方式(例如在 [1] 中又是一种). 但是我們希望所給的方式能是在陈述上較簡单并在应用时[1)]較簡捷自然的.

定理 1. 設条件(I)滿足. 那末如果 K 有有界逆,并且

$$\varepsilon' = \|K^{-1}\|\,|\lambda|^2\,\varepsilon\|\varphi\| < 1,$$

那末 $\bar{K}$ 也有有界逆,并且

$$\|x^* - (\lambda\bar{H}\bar{x}^* + y)\| \leqslant \frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon'}(\delta' + \|y - x^*\|) + \delta', \tag{5}$$

其中 $\delta' = \|K^{-1}\|\,|\lambda|(|\lambda|\varepsilon\|\psi y\| + \delta)$, 而 δ 滿足下面的估計式:

(II) $$\|Hy - \bar{H}\psi y\|\leqslant\delta.$$

證. 先設(4)有解 $\bar{x}^*$. 因为 $Kx^* = y$, $K(\bar{H}\bar{x}^*) = \bar{H}\bar{x}^* - \lambda H(\bar{H}\bar{x}^*)$, $Ky = y - \lambda Hy$, 并且 $\bar{x}^* = \lambda\varphi\bar{H}\bar{x}^* + \psi y$, $\bar{H}\bar{x}^* = \lambda\bar{H}\varphi(\bar{H}\bar{x}^*) + \bar{H}\psi y$, 所以

$$\left.\begin{aligned}
\|x^* - (\lambda\bar{H}\bar{x}^* + y)\| &\leqslant \|K^{-1}\|\|Kx^* - \lambda K(\bar{H}\bar{x}^*) - Ky\|\\
&= \|K^{-1}\|\,|\lambda|\,\|\lambda H(\bar{H}\bar{x}^*) - \bar{H}\bar{x}^* + Hy\|\\
&= \|K^{-1}\|\,|\lambda|\,\|\{\lambda H(\bar{H}\bar{x}^*) - \lambda\bar{H}\varphi(\bar{H}\bar{x}^*)\} + \{Hy - \bar{H}\psi y\}\|\\
&\leqslant \|K^{-1}\|\,|\lambda|(|\lambda|\varepsilon\|\bar{x}^*\| + \delta)\\
&\leqslant \|K^{-1}\|\,|\lambda|\{|\lambda|\varepsilon(\|\varphi\|\|\lambda\bar{H}\bar{x}^*\| + \|\psi y\|) + \delta\} = \varepsilon'\|\lambda\bar{H}\bar{x}^*\| + \delta',
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

所以

$$\|\lambda\bar{H}\bar{x}^*\| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon'}(\delta' + \|y - x^*\|). \tag{7}$$

把(7)代回(6),即得(5).

現在証明 $\bar{K}$ 有有界逆. 否則齐次方程

$$\bar{K}\bar{x} = \bar{x} - \lambda\varphi\bar{H}\bar{x} = 0$$

有解 $\bar{x}_0 \neq 0$. 但依(7)(这时考虑 $y=0$, $\delta=0$, $x^*=0$),

$$\|\lambda\bar{H}\bar{x}_0\| = 0,$$

于是 $\bar{x}_0 = \lambda\varphi\bar{H}\bar{x}_0 = 0$, 得出矛盾. 所以 $\bar{K}$ 要有有界逆. 証完.

註 2. 当 X 是賦伪范空間:

$$\|x + y\| \leqslant \mu(\|x\| + \|y\|),$$

定理 1 亦眞,只是其中的 ε' 与 δ' 含有 μ 的因子

1) 主要指以下 II 中的(i)(即积分方程的"机械求积的方法").

註 3. 在定理 1 的証明中容易看出，如果条件（I）加強为条件

$$(\mathrm{I}_0)\qquad \|H-\overline{H}\varphi\|\leqslant \varepsilon_1,$$

那末定理 1 中的 ε' 可以放寬为

$$\varepsilon_1' = \|K^{-1}\|\,|\lambda|\,\varepsilon_1;$$

δ' 可以放寬为

$$\delta_1' = \|K^{-1}\|\,|\lambda|\,\delta,$$

而

$$\|x^* - (\lambda\overline{H}\overline{x}^* + y)\| \leqslant \frac{\varepsilon_1'}{1-\varepsilon_1'}(\delta_1' + \|y - x^*\|) + \delta_1'.$$

註 4. 形状如(4)的近似方程比形状如下的近似方程

$$\overline{x} - \lambda\varphi\overline{H}\overline{x} = \varphi y \tag{4'}$$

具有較大的灵活性(在(4)中取 $\psi=\varphi$ 即得(4′)). 它的方便之处是：实用上如果計算 φy 有困难，可以改为对于 ψy 的計算；而且反过来，可以选取适当的 ψ，使估計式(II)更精确. 具体的說明可参看以下 II 中的(ii)，(iii)与(v)等.

在定理 1 中由 K 有逆得到了 $\overline{K}$ 有逆. 反之，也可以根据 $\overline{K}$ 有逆来判断 K 的有逆問題. 为此，我們假設 $\overline{H}$ 与 H 之間有着如下的"近似关系"：

$$(\mathrm{III})\qquad \|(H-\overline{H}\varphi)H\|\leqslant \eta.$$

并設 X——完备，H——全連續.

那末有

定理 2. 設条件(III)滿足，那末如果 $\overline{K}$ 有有界逆，并且

$$\eta' = |\lambda|^2(1+|\lambda|\,\|\overline{K}^{-1}\varphi\|\,\|\overline{H}\|)\eta < 1,$$

那末 K 也有有界逆，并且

$$\|x^* - (\lambda\overline{H}\overline{x}^* + y)\| \leqslant \frac{\eta'}{1-\eta'}(\alpha' + \|\lambda\overline{H}\overline{x}^* + y\|) + \alpha', \tag{8}$$

其中 $\alpha' = |\lambda|(1+|\lambda|\,\|\overline{K}^{-1}\varphi\|\,\|\overline{H}\|)\alpha$，而 α 滿足下面的估計式

$$(\mathrm{IV})\qquad \|Hy - \overline{H}\varphi y\| \leqslant \alpha.$$

証. 先設(3)有解 x^*. 于是

$$\left.\begin{aligned}\|x^* - (\lambda\overline{H}\overline{x}^* + y)\| &= |\lambda|\,\|Hx^* - \overline{H}\overline{x}^*\| \leqslant |\lambda|(\|Hx^* - \overline{H}\varphi x^*\| + \\ &\quad + \|\overline{H}\|\,\|\varphi x^* - \overline{x}^*\|),\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned}\|\varphi x^* - \overline{x}^*\| &= \|\overline{K}^{-1}(\overline{K}\varphi x^* - \overline{K}\overline{x}^*)\| = \|\overline{K}^{-1}(\overline{K}\varphi x^* - \varphi K x^*)\| \leqslant \\ &\leqslant \|\overline{K}^{-1}\varphi\|\,|\lambda|\,\|\overline{H}\varphi x^* - Hx^*\|,\end{aligned}$$

而

$$\|Hx^* - \overline{H}\varphi x^*\| = \|H(\lambda Hx^* + y) - \overline{H}\varphi(\lambda Hx^* + y)\| \leqslant \eta|\lambda|\,\|x^*\| + \alpha,$$

把以上两式代回(9)，即得

$$\|x^* - (\lambda\overline{H}\overline{x}^* + y)\| \leqslant \eta'\|x^*\| + \alpha', \tag{10}$$

于是

$$\|x^*\| \leqslant \frac{1}{1-\eta'}(\alpha' + \|\lambda\overline{H}\overline{x}^* + y\|), \tag{11}$$

把(11)代回(10),即得(8).

现在証明K有有界逆,否則齐次方程

$$Kx = x - \lambda Hx = 0$$

有解 $x_0 \neq 0$. 但依(11)(这时考慮 $y = 0, \alpha = 0, \bar{x}^* = 0$),

$$\|x_0\| = 0,$$

得出矛盾. 所以K有有界逆. 証完.

II. 对于积分方程的应用

现在利用上述一般理論,給出积分方程

$$x(s) - \lambda \int_0^1 H(s, t)\, x(t) dt = y(s) \tag{12}$$

的各种近似方法.

先把(12)改写成方程(3)的形状:

$$Kx = x - \lambda Hx = y,$$

其中引进算子 $Hx = \int_0^1 H(s, t)\, x(t) dt$.

我們要考虑的是:如何选取算子 $\bar{H}$, φ 与 ψ (以及空間X与$\bar{X}$, 但以下 $\bar{X}$ 恆指某一n維空間), 使得条件(I) (以及(III))滿足以及估式(II)更精确. 对于不同的 $\bar{H}$, φ 或 ψ, 便得到不同的近似方法.

(i) "机械求积的方法"

今取 $X = C$[1]. 对于

$$Hx = \int_0^1 H(s, t)\, x(t) dt,$$

取

$$\bar{H}\varphi x = \sum_{k=1}^{n} A_k H(s, t_k)\, x(t_k),$$

其中

$$\varphi x = (A_1 x(t_1), \cdots, A_n x(t_n));$$

$$\bar{H}\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} H(s, t_k)\xi_k, \quad 当\ \bar{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \bar{X},$$

而 t_k 与 A_k 各是某一(任意的)"机械求积公式"中的分点与系数. 今取 $\bar{X} = l_n^1$[2], 那末 $\|\varphi\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |A_k|$.

并驗証条件(I):

1) C 表示 $[0,1]$ 上連續函数的空間,其中范数是 $\|x\| = \max|x(s)|$.

2) l_n^1 表示n維的空間,其中范数 $\|\bar{x}\| = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|$, 当 $\bar{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in l_n^1$.

$$\begin{aligned} \|(H-\overline{H}\varphi)\overline{H}\overline{x}\| &= \max_s \left| \int_0^1 H(s,t)\left(\sum_{i=1}^n H(t,t_i)\xi_i\right)dt - \right. \\ &\left. - \sum_{k=1}^n \left(A_k H(s,t_k)\sum_{i=1}^n H(t_k,t_i)\xi_i\right)\right| = \\ &= \max_s \left|\sum_{i=1}^n \xi_i \left\{\int_0^1 H(s,t)H(t,t_i)\,dt - \sum_{k=1}^n A_k H(s,t_k)H(t_k,t_i)\right\}\right| \leqslant \varepsilon\|\overline{x}\|, \end{aligned} \tag{13}$$

卽条件(I)满足，其中

$$\varepsilon = \max_{s,u}\left|\int_0^1 H(s,t)H(t,u)\,dt - \sum_{k=1}^n A_k H(s,t_k)\,H(t_k,u)\right|, \tag{14}$$

ε 可以按照“机械求积公式”的余項来估值.

取 $\psi=\varphi$，并驗明估式(II)中的 δ：

$$\|Hy-\overline{H}\psi y\| = \max_s \left|\int_0^1 H(s,t)\,y(t)\,dt - \sum_{k=1}^n A_k H(s,t_k)y(t_k)\right| \leqslant \delta, \tag{15}$$

δ 可以按照“机械求积公式”的余項来估值.

这时近似方程(4)乃是如下的代数方程組

$$\xi_i - \lambda A_i \sum_{k=1}^n H(t_i,t_k)\xi_k = A_i\,y(t_i) \quad (1\leqslant i\leqslant n). \tag{16}$$

于是由定理 1 得：

如果 λ 不是积分方程(12)的固有值，并且

$$\varepsilon' = \|K^{-1}\|\,|\lambda|^2\left(\sum_{k=1}^n |A_k|\right)\varepsilon < 1, \tag{17}$$

那末有穷組(16)必有一意解 $\overline{x}^* = (\xi_1^*,\cdots,\xi_n^*)$，并且

$$\max_s\left|x^*(s) - \left\{\lambda\sum_{k=1}^n H(s,t_k)\xi_k^* + y(s)\right\}\right| = O\left\{\left(\sum_{k=1}^n |A_k|\right)\varepsilon + \delta\right\}, \tag{18}$$

其中 ε 与 δ 之値各見于(14)与(15).

註 5.　条件(III)也满足. 事实上，类似于(13)的估計，

$$\eta = \varepsilon;$$

而估式(IV)中的

$$\alpha = \delta.$$

因此可得对应于定理 2 的結論(以下諸例中均略去对于定理 2 的叙述).

註 6.　利用各按 s 及 t 为阶数不高于 n 的三角多項式 $V(s,t)$ 及 $V_1(s,t)$：

$$|H(s,t)-V(s,t)| \leqslant E_n^s(H);\ |H(s,t)-V_1(s,t)| \leqslant E_n^t(H),$$

可以給出(18)的一种估值，事实上，取 $X=\widetilde{C}$[1]，

$$A_k = \frac{1}{n},\ t_k = \frac{2k-1}{2n}\ (1\leqslant k\leqslant n),$$

那末(14)中的

---

1) $\widetilde{C}$ 表示連續周期函数的空間(周期为 1).

$$\varepsilon \leqslant \max_{s,u}\left|\int_0^1 H(s,t)H(t,u)\,dt - \int_0^1 V_1(s,t)V(t,u)\,dt\right| +$$

$$+\max_{s}\left|\sum_{k=1}^{n} A_k V_1(s,t_k)V(t_k,u) - \sum_{k=1}^{n} A_k H(s,t_k)H(t_k,u)\right| \leqslant 2\{ME_n^t(H) + M'E_n^t(H)\},$$

其中 $M = \max|H(s,t)|$, $M' = \max|V_1(s,t)|$; 类似地,(15)中的

$$\delta \leqslant 2\{\|y\|E_n^t(H) + M'E_n(y)\}.$$

因此(18)成为

$$\|x^* - (\lambda\overline{H}x^* + y)\| = O\{E_n^t(H) + E_n^s(H) + E_n(y)\}.$$

而在[1]中,"近似解"对于精确解的近似程度乃是

$$O\{\log n\,[E_n^t(H) + E_n^s(H) + E_n(y)]\}.$$

註 7. 利用連續模:

$$\omega_H^{(t)}(\delta) = \sup|H(s,t') - H(s,t'')|\,(|t'-t''|<\delta);$$

$$\omega_H^{(s)}(\delta) = \sup|H(s',t) - H(s'',t)|\,(|s'-s''|<\delta),$$

可以給出(18)的另一种估値,事实上,取 $X = C$,

$$A_k = \frac{1}{n},\ t_k = \frac{2k-1}{2n}\quad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

那末(14)中的

$$\varepsilon = \max_{s,u}\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} H(s,t)H(t,u)\,dt - \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} H(s,t_k)H(t_k,u)\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant M\left\{\omega_H^{(t)}\left(\frac{1}{2n}\right) + \omega_H^{(s)}\left(\frac{1}{2n}\right)\right\}.$$

类似地,(15)中的

$$\delta \leqslant \|y\|\,\omega_H^{(t)}\left(\frac{1}{2n}\right) + M\omega_y\left(\frac{1}{2n}\right).$$

因此(18)成为

$$\|x^* - (\lambda\overline{H}x^* + y)\| = O\left\{\omega_H^{(t)}\left(\frac{1}{2n}\right) + \omega_H^{(s)}\left(\frac{1}{2n}\right) + \omega_y\left(\frac{1}{2n}\right)\right\}.$$

註 8. 利用"块状常值函数"(見[4]):

$$\overline{H}(s,t) = H(t_i,t_k)\left(|s-t_i| < \frac{1}{2n},\ |t-t_k| < \frac{1}{2n}\right),$$

可以給出(18)的又一种估値. 事实上,取 $X = M$[1],

$$A_k = \frac{1}{n},\ t_k = \frac{2k-1}{2n}\quad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

那末(14)中的

$$\varepsilon \leqslant \sup_{s,u}\left|\int_0^1 H(s,t)H(t,u)\,dt - \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \overline{H}(s,t)\overline{H}(t,u)\,dt\right| +$$

$$+\sup_{s,u}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\overline{H}(s,t_k)\overline{H}(t_k,u) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}H(s,t_k)H(t_k,u)\right| \leqslant 4M\sup|H-\overline{H}|.$$

1) M 表示有界函数的空間,其中范数 $\|x\| = \sup|x(s)|$.

因此(18)成为

$$\|x^* - (\lambda\overline{H}\overline{x}^* + y)\| = O\{\sup|H - \overline{H}| + \delta\}.$$

如果不取 ψ 为 φ，而取

$$\psi y = \left(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} y ds\right)_{1\leqslant i\leqslant n},$$

那末

$$\left.\begin{aligned}
&\|Hy - \overline{H}\psi y\| = \sup_s\left|\int_0^1 H(s,t)\,y(t)\,dt - \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} H(s,t_k)\,y(t)dt\right| \leqslant \\
&\leqslant \sup_s\left|\int_0^1 H(s,t)\,y(t)dt - \int_0^1 \overline{H}(s,t)\,y(t)dt\right| + \\
&+ \sup_s\left|\sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \overline{H}(s,t_k)\,y(t)dt - \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} H(s,t_k)\,y(t)dt\right| \leqslant 2\sup|H-\overline{H}|\,\|y\|,
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

即 $\delta = O\{\sup|H - \overline{H}|\}$. 而这时近似方程(4)乃是有旁組

$$\xi_i - \lambda\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n H(t_i, t_k)\,\xi_k = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} y\,ds \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \quad (20)$$

而估計式(5)成为

$$\|x^* - (\lambda\overline{H}\overline{x}^* + y)\| = O\{\sup|H - \overline{H}|\},$$

注意，其中的 $\overline{x}^*$ 乃是(20)的解，而不是(16)的解.

但是，我們愿意指出，註 8 中的結果也可以用如下的方式直接得到：

(ii)

对于

$$Hx = \int_0^1 H(s,t)\,x(t)\,dt,$$

取

$$\overline{H}\varphi x = \int_0^1 \overline{H}(s,t)\,x(t)\,dt,$$

其中

$$\overline{H}(s,t) = H(t_i, t_k) \quad \left(|s - t_i| < \frac{1}{2n},\ |t - t_k| < \frac{1}{2n}\right);$$

$$\varphi x = \left(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} x\,ds\right)_{1\leqslant i\leqslant n};$$

$$\overline{H}\overline{x} = \sum_{k=1}^n H(s,t_k)\,\xi_k,\ 当\ \overline{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_n),$$

而 $t_k = \dfrac{2k-1}{2n}\ (1 \leqslant k \leqslant n)$.

取 $X = M$，于是由(19)得知

$$\|(H - \overline{H}\varphi)\,x\| \leqslant 2\sup|H - \overline{H}|\,\|x\|,$$

因此条件(I_0)满足，其中 $\varepsilon_1 = 2\sup|H - \overline{H}|$.

关于 ψ 的取法,可以給出两种:

第一种为

$$\psi = \varphi,$$

这时由(19)看出估式(II)中的 $\delta = 2\sup|H - \overline{H}|\,\|y\|$. 而近似方程(4)乃是有穷組(20):

$$\xi_i - \lambda \sum_k \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} H(s, t_k)\, \xi_k\, ds = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} y\, ds \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

第二种为

$$\psi y = (A_1 y(t_1), \cdots, A_n y(t_n)),$$

这时

$$\|Hy - \overline{H}\psi y\| = \sup_s \left| \int_0^1 H(s, t)\, y(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n} A_k H(s, t_k)\, y(t_k) \right| \leqslant \delta,$$

δ 可以按照"机械求积公式"的余項来估值. 这时近似方程(4)成为有穷組

$$\xi_i - \lambda \sum_k \xi_k \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} H(s, t_k) ds = A_i y(t_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{21}$$

(把(21)与(20)相比,(21)的优点在于不必对 y 計算积分)

利用定理 1 (註 3)得:

如果 λ 不是积分方程(12)的固有值,并且

$$\varepsilon_1' = 2\|K^{-1}\|\,|\lambda|\sup|H - \overline{H}| < 1,$$

那末有穷組(20)与(21)必定各有一意解 $\bar{x}_{20}^*$ 与 $\bar{x}_{21}^*$, 并且

$$\|x^* - (\lambda \overline{H}\bar{x}_{20}^* + y)\| = O\{\sup|H - \overline{H}|\};$$

$$\|x^* - (\lambda \overline{H}\bar{x}_{21}^* + y)\| = O\{\sup|H - \overline{H}| + \delta\}.$$

这些就是註 8 中的結果.

(iii) 蜕化核方法

对于

$$Hx = \int_0^1 H(s, t)\, x(t)\, dt,$$

取

$$\overline{H}\varphi x = \int_0^1 \overline{H}_n(s, t)\, x(t)\, dt,$$

其中

$$\overline{H}_n(s, t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(s)\, b_k(t);$$

$$\varphi x = \left(\int_0^1 b_i\, x\, ds\right)_{1 \leqslant i \leqslant n};$$

$$\overline{H}\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} a_k(s) \xi_k, \text{ 当 } \bar{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_n).$$

取 $X = M$, 于是

$$\|(H - \overline{H}\varphi)x\| \leqslant \sup|H - \overline{H}_n|\,\|x\|, \tag{22}$$

因此条件(I_0)满足，其中 $\varepsilon_1 = \sup|H - \overline{H}_n|$.

关于 ψ 的取法，可以给出两种：

第一种为

$$\psi = \varphi,$$

这时由(22)看出估式(II)中的 $\delta = \sup|H - \overline{H}_n|\,\|y\|$. 而近似方程 (4) 乃是有穷組

$$\xi_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^1 b_i\, a_k\, ds\right) \xi_k = \int_0^1 b_i\, y\, ds \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{23}$$

第二种为

$$\psi y = \left(\sum_{k=1}^{n} A_k\, b_i(t_k)\, y(t_k)\right)_{1 \leqslant i \leqslant n},$$

这时

$$\|Hy - \overline{H}\psi y\| = \sup_s \left|\int_0^1 H(s, t)\, y(t)\, dt - \sum_{i=1}^{n} a_i(s) \sum_{k=1}^{n} A_k\, b_i(t_k)\, y(t_k)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_s \left|\int_0^1 H(s, t)\, y(t)\, dt - \int_0^1 \overline{H}_n(s, t)\, y(t)\, dt\right| +$$

$$+ \sup_s \left|\int_0^1 \overline{H}_n(s, t)\, y(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n} A_k\, \overline{H}_n(s, t_k)\, y(t_k)\right| \leqslant \sup|H - \overline{H}_n|\,\|y\| + \delta_1,$$

其中

$$\delta_1 = \sup_s \left|\int_0^1 \overline{H}_n(s, t)\, y(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n} A_k\, \overline{H}_n(s, t_k)\, y(t_k)\right|,$$

δ_1 可以按照"机械求积公式"的余項来估値，即估式 (II) 中的 $\delta = \sup|H - \overline{H}_n|\,\|y\| + \delta_1$. 这时近似方程(4)成为有穷組

$$\xi_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^1 b_i\, a_k\, ds\right) \xi_k = \sum_{k=1}^{n} A_k\, b_i(t_k)\, y(t_k) \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{24}$$

(把(24)与(23)相比，(24)的优点在于不必計算 $b_i\, y$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的积分)

利用定理 1 (注 3)得：

如果 λ 不是积分方程(12)的固有值，并且

$$\varepsilon_1' = \|K^{-1}\|\,|\lambda|\sup|H - \overline{H}_n| < 1,$$

那末有穷組(23)与(24)必定各有一意解 $\overline{x}_{23}^*$ 与 $\overline{x}_{24}^*$，并且

$$\|x^* - (\lambda \overline{H}\overline{x}_{23}^* + y)\| = O\{\sup|H - \overline{H}_n|\};$$

$$\|x^* - (\lambda \overline{H}\overline{x}_{24}^* + y)\| = O\{\sup|H - \overline{H}_n| + \delta_1\}.$$

(iv) Ritz 方法

对于

$$Hx = \int_0^1 H(s, t)\, x(t)\, dt,$$

取

$$\overline{H}\varphi x = \int_0^1 \overline{H}_{nn}(s, t)\, x(t)\, dt,$$

其中

$$\overline{H}_{nn}(s, t) = \sum_{i,k=1}^{n} h_{ik}\,\omega_i(s)\,\omega_k(t);$$

$$\varphi x = \left(\int_0^1 \omega_i x\, ds\right)_{1\leqslant i\leqslant n};$$

$$\overline{H}\overline{x} = \sum_{i,k=1}^{n} h_{ik}\,\omega_i(s)\,\xi_k, \quad 当\ \overline{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_n),$$

而 $\{\omega_i\}$ 是 L^2 1) 中的就范正交組，$h_{ik} = \int_0^1\int_0^1 H\,\omega_i\,\omega_k\, ds\, dt.$

取 $X = L^2$，于是

$$\|(H - \overline{H}\varphi)\,x\| = \left\{\int_0^1\left(\int_0^1 (H - \overline{H}_{nn})\,x(t)\,dt\right)^2 ds\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \|H - \overline{H}_{nn}\|_{L^2xL^2}\|x\|,$$

因此条件 (I_0) 满足，其中 $\varepsilon_1 = \|H - \overline{H}_{nn}\|_{L^2xL^2} = \left\{\int_0^1\int_0^1 (H - \overline{H}_{nn})^2\, ds\, dt\right\}^{\frac{1}{2}}$. 取 $\psi = \varphi$，于是估式(II)中的 $\delta = \|H - \overline{H}_{nn}\|_{L^2xL^2}\|y\|$.

这时近似方程(4)乃是有穷組

$$\xi_i - \lambda\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1\int_0^1 H\omega_i\,\omega_k\, ds\, dt\right)\xi_k = \int_0^1 \omega_i\, y ds \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{25}$$

于是由定理 1（注 3）得：

如果 λ 不是积分方程(12)的固有值，并且

$$\varepsilon_1' = \|K^{-1}\|\,|\lambda|\,\|H - \overline{H}_{nn}\|_{L^2xL^2} < 1,$$

那末有穷組(25)必有一意解 $\overline{x}^*$，并且

$$\|x^* - (\lambda\overline{H}\overline{x}^* + y)\| = O\{\|H - \overline{H}_{nn}\|_{L^2xL^2}\}.$$

而在[1]中，“近似解”对于精确解的近似程度乃是

$$O\{\|H - \overline{H}_{nn}\|_{L^2xL^2} + \|y - \overline{y}_n\|\}.$$

(v)

对于

$$Hx = \int_0^1 H(s, t)\,x(t)dt,$$

取

$$\overline{H}\varphi x = \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} H(s, t_k)\,x(t)\,dt,$$

其中

$$\varphi x = \left(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} x\, ds\right)_{1\leqslant i\leqslant n};$$

$$\overline{H}\overline{x} = \sum_{k=1}^{n} H(s, t_k)\,\xi_k, \quad 当\ \overline{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_n),$$

---

1) L^2 表示平方可积函数的空間，其中范数 $\|x\| = \int_0^1 |x(s)|^2 ds$.

而 $t_k = \frac{2k-1}{2n} (1 \leqslant k \leqslant n)$.

取 $X = C$，于是

$$\left.\begin{aligned} \|(H - \overline{H}\varphi)x\| = \max_s \Bigg| \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} H(s, t)\, x(t)\, dt - \\ - \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} H(s, t_k)\, x(t) dt \Bigg| \leqslant \omega_H^{(t)}\left(\frac{1}{2n}\right) \|x\|, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

因此条件(I_0)滿足，其中 $\varepsilon_1 = \omega_H^{(t)}\left(\frac{1}{2n}\right)$.

关于 ψ 的取法，可以給出两种：

第一种为

$$\psi = \varphi,$$

这时由(26)看出估式(II)中的 $\delta = \omega_H^{(t)}\left(\frac{1}{2n}\right)\|y\|$. 而近似方程(4)乃是有穷組

$$\xi_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} H(s, t_k)\, ds \right) \xi_k = \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} y\, ds \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{27}$$

第二种为

$$\psi y = (A_1 y(t_1), \cdots, A_n y(t_n)),$$

这时

$$\|Hy - \overline{H}\psi y\| = \max_s \left| \int_0^1 H(s, t)\, y(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n} A_k H(s, t_k)\, y(t_k) \right| \leqslant \delta,$$

δ 可以按照“机械求积公式”的余項来估值. 而近似方程(4)成为有穷組

$$\xi_i - \lambda \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} H(s, t_k)\, ds \right) \xi_k = A_i y(t_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{28}$$

于是由定理1(注3)可得：

如果 λ 不是积分方程(12)的固有值，并且

$$\varepsilon_1' = \|K^{-1}\|\, |\lambda|\, \omega_H^{(t)}\left(\frac{1}{2n}\right) < 1,$$

那末有穷組(27)与(28)必定各有一意解 $\bar{x}_{27}^*$ 与 $\bar{x}_{28}^*$，并且

$$\|x^* - (\lambda \overline{H}\bar{x}_{27}^* + y)\| = O\left\{\omega_H^{(t)}\left(\frac{1}{2n}\right)\right\};$$

$$\|x^* - (\lambda \overline{H}\bar{x}_{28}^* + y)\| = O\left\{\omega_H^{(t)}\left(\frac{1}{2n}\right) + \delta\right\}.$$

註 9. I 中的一般理論也可以应用到 l^2 中的无穷組上（这是容易处理的，从略）. 特别，按照註 2，I 中的一般理論也可以应用到 $l^{\frac{1}{2}}$ 中的无穷組上.

§2. 广于第二种的方程的近似方法

I. 一般图式

給定方程

$$Kx = Gx - \lambda Tx = y, \tag{29}$$

其中 G, T 为綫性算子, $D_G \subset D_T \subset X$, $W_G, W_T \subset Y$[1]. X, Y 为綫性賦范空間.

設(29)有解 $x^* \in D_G$. 現在我們去逼近解本身: 設 x^* 可用另一綫性賦范空間 $\overline{X}$ 中的元 $\bar{x}_0$ 所决定的象 $\tau\bar{x}_0$ 来"逼近",其中 $\tau \in (\overline{X} \to X)$:

$$K\tau\bar{x}_0 \approx y.$$

于是

$$\sigma K\tau\bar{x}_0 \approx \sigma y,$$

其中 $\sigma \in (Y \to \overline{Y})$, $\overline{Y}$ 为另一綫性賦范空間. 取等式

$$\sigma K\tau\bar{x} = \sigma y$$

或

$$\sigma G\tau\bar{x} - \lambda\sigma T\tau\bar{x} = \sigma y, \tag{30}$$

卽得(29)之一种近似方程.

更一般些,对(30)中的算子 $\sigma T\tau$ 再作一次"近似": 将 $\sigma T\tau$ 用某一"近似算子" $\overline{T}$ 来代替,所得的方程[2]

$$\overline{K}\bar{x} = \sigma G\tau\bar{x} - \lambda\overline{T}\bar{x} = \sigma y, \tag{31}$$

取作(29)的近似方程. 而(31)的解 $\bar{x}^*$ 通过映象 τ 得到的 $\tau\bar{x}^*$ 取作(29)的近似解.

我們要考察的是近似方程(31)的有解性,近似解的收斂于精确解以及收斂的速率.

为此,我們假設:

(a) 下列条件成立:

(V) 存在 $\bar{x}_0 \in \overline{X}$, 使 $\|y - G\tau\bar{x}_0\| \leqslant \theta$;

(VI) 存在 $\bar{x} \in \overline{X}$, 使 $\|Tx - G\tau\bar{x}\| \leqslant \mu_1\|x\|$, $x \in X$.

并且, $\overline{T}$ 对 $\sigma T\tau$ 的"近似"意义是指下述条件

(VII) $\|\overline{T}\bar{x} - \sigma T\tau\bar{x}\| \leqslant \nu\|\tau\bar{x}\|$, $\bar{x} \in \overline{X}$.

(b) $\overline{K}\bar{x} = 0$ 只有零解 $\Longrightarrow$ $\overline{K}\bar{x} = \bar{y}$ 对任意 $\bar{y} \in \overline{Y}$ 都有一意解[3]; 并且 $\sigma G\tau$ 有逆 $(\sigma G\tau)^{-1}$.

那末有

定理 3. 假設(a)与(b)滿足,那末如果

$$\|x\| \leqslant \rho\|Kx\|,\ x \in D_G,$$

且

$$\mu = \rho|\lambda|\{(1 + \|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\sigma\|)\mu_1 + \|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\|\nu\} < 1,$$

那末 $\overline{K}$ 必有有界逆,且

$$\|x^* - \tau\bar{x}^*\| \leqslant \frac{\mu}{1-\mu}\{\rho(1 + \|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\sigma\|)\theta + \|x^*\|\} + \rho(1 + \|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\sigma\|)\theta, \tag{32}$$

其中 x^* 是精确方程(29)的解, $\bar{x}^*$ 是近似方程(31)的解.

証. 先設(31)有解 $\bar{x}^*$ [注意 $\bar{x}^* = (\sigma G\tau)^{-1}(\sigma y + \lambda\overline{T}\bar{x}^*)$]. 那末

1) D_G 与 W_G 各表示 G 的定义域与值域.
2) 这是由 $\overline{X}$ 到 $\overline{Y}$ 中的方程.
3) $\Longrightarrow$ 表示蘊含(当 $\overline{X}, \overline{Y}$ 为 n 維空間时,这一性質显然成立).

$$\|x^* - \tau\bar{x}^*\| \leqslant \rho\|Kx^* - K\tau\bar{x}^*\| = \rho\|y - G\tau(\sigma G\tau)^{-1}(\sigma y + \lambda\bar{T}\bar{x}^*) + \lambda T\tau\bar{x}^*\| =$$
$$= \rho\|(y - G\tau\bar{x}_0) + G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\sigma(G\tau\bar{x}_0 - y) - \lambda\{G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\bar{T}\bar{x}^* - T\tau\bar{x}^*\}\|,$$

因設有条件(V),于是

$$\|x^* - \tau\bar{x}^*\| \leqslant \rho(1 + \|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\sigma\|)\theta + \rho|\lambda|\|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\bar{T}\bar{x}^* - T\tau\bar{x}^*\|.$$

而

$$\|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\bar{T}\bar{x}^* - T\tau\bar{x}^*\| =$$
$$= \|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}(\bar{T}\bar{x}^* - \sigma T\tau\bar{x}^*) + G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\sigma\{T(\tau\bar{x}^*) - G\tau\bar{x}\} + \{G\tau\bar{x} - T(\tau\bar{x}^*)\}\|,$$

因設有条件(VII)与(VI),于是

$$\rho|\lambda|\|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\bar{T}\bar{x}^* - T\tau\bar{x}^*\| \leqslant \mu\|\tau\bar{x}^*\|.$$

于是

$$\|x^* - \tau\bar{x}^*\| \leqslant \rho(1 + \|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\sigma\|)\theta + \mu\|\tau\bar{x}^*\|. \tag{33}$$

于是

$$\|\tau\bar{x}^*\| \leqslant \frac{1}{1-\mu}\{\rho(1 + \|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\sigma\|)\theta + \|x^*\|\}. \tag{34}$$

再代回(33)即得(32).

現証 $\bar{K}$ 有有界逆,否則

$$\bar{K}\bar{x} = \sigma G\tau\bar{x} - \lambda\bar{T}\bar{x} = 0$$

有解 $\bar{x}_1 \neq 0$. 依(34)(此时考虑 $y = 0, \theta = 0, x^* = 0$),

$$\|\tau\bar{x}_1\| = 0.$$

那末 $\bar{x}_1 = (\sigma G\tau)^{-1}\sigma G(\tau\bar{x}_1) = 0$,矛盾. 証毕.

II. 一般图式在常微分方程中的某些实現

(i) 常微分方程的插值方法1)

考察方程

$$Kx \equiv \frac{d^{2m}x}{dt^{2m}} - q_1(t)\frac{d^{2m-1}x}{dt^{2m-1}} - \cdots - q_{2m}(t)x = y(t), \tag{35}$$

并带有边界条件

$$x = \frac{dx}{dt} = \cdots = \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} = 0, \text{如果 } t = a \text{ 或 } t = b. \tag{36}$$

我們欲将(35)(36)的解用形如下状的多項式来逼近:

$$(t-a)^m(b-t)^m\sum_{k=1}^{n}\xi_k t^{k-1},$$

即取

$$\tau\bar{x} = (t-a)^m(b-t)^m\sum_{k=1}^{n}\xi_k t^{k-1},\ \bar{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \bar{X},$$

这里 $\bar{X}$ 为 n 維空間. 又取 $\bar{Y} = m_n$.

現在驗証条件(VI)与(V). 取 $\lambda = 1$;

1) 这一方法首先由 Э. Б. Карпиловская 論証过([2]). 这里把它轉在上述的一般图式下,从而获得一些簡化(例如不需考虑 G 的有逆性等等),結論也一般些.

$$Gx = \frac{d^{2m}x}{dt^{2m}}; \quad Tx = \sum_{k=1}^{2m} q_k \frac{d^{2m-k}x}{dt^{2m-k}}.$$

(于是 $G\tau\bar{x}$ 乃是次数不超过 $n-1$ 的多項式). 取 X 为 $[a, b]$ 上具有 $2m$ 阶連續导数并满足边界条件(36)的函数全体,其中范数定义成

$$\|x\| = \sum_{k=0}^{2m} \max_t \left|\frac{d^k x}{dt^k}\right|.$$

并取 $Y = C$.

設 $q_k(t)(1 \leqslant k \leqslant 2m)$ 連續可微,則

$$\left\|\frac{d}{dt} Tx\right\|_c \leqslant \sum_{k=1}^{2m} \left(\left\|\frac{dq_k}{dt}\right\|_c \left\|\frac{d^{2m-k}x}{dt^{2m-k}}\right\|_c + \|q_k\|_c \left\|\frac{d^{2m-k+1}x}{dt^{2m-k+1}}\right\|_c\right) \leqslant \alpha\|x\|_X,$$

这里 α 为一常数, 依函数构造論中的結果, 存在次数不超过 $n-1$ 的多項式 $p(t) = (G\tau\bar{x})(t)$, 使

$$\|Tx - G\tau\bar{x}\|_c \leqslant \frac{r}{n}\|x\|_X, \quad x \in X,$$

其中 r 为一常数,即条件(VI)满足, 其中 $\mu_1 = \frac{r}{n}$.

条件(V)也满足. 事实上,存在一个次数不超过 $n-1$ 的多項式 $p_0(t) = (G\tau\bar{x}_0)(t)$,使

$$\|y - G\tau\bar{x}_0\| \leqslant E_n(y),$$

即 $\theta = E_n(y)$.

取

$$\sigma y = [y(t_1), \cdots, y(t_n)].$$

显然 $\|\sigma\| \leqslant 1$. 又

$$\sigma G\tau\bar{x} = \left\{\frac{d^{2m}}{dt^{2m}}(t-a)^m(b-t)^m \sum_{k=1}^{n} \xi_k t^{k-1}|_{t=t_i}\right\}_{1\leqslant i\leqslant n} = 0 \Longrightarrow \bar{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_n) = 0,$$

故$(\sigma G\tau)^{-1}$存在. 注意到 $[G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\bar{y}](t) = p_1(t)$ 乃是满足 $\sigma p_1 = \bar{y}$ 或

$$p_1(t_i) = \eta_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

的 $n-1$ 次多項式,其中 $\bar{y} = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \in \bar{Y}$. 于是, 当 $(t_1, \cdots, t_n)$ 为 Чебышев 分点时,

$$\|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\| \leqslant A\log n + B, \tag{37}$$

而当 $(t_1, \cdots, t_n)$ 为 Gauss 分点时,

$$\|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\| \leqslant D\sqrt{n}, \tag{38}$$

其中 A, B 与D都是常数.

取 $\bar{T} = \sigma T\tau$, 于是条件(VII)中的 $v = 0$. 而近似方程(31)化为有旁組

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^{2m}}{dt^{2m}}(t-a)^m(b-t)^m \sum_{k=1}^{n} \xi_k t^{k-1}|_{t=t_i} - \\ &- \sum_{s=1}^{2m} q_s(t) \frac{d^{2m-s}}{dt^{2m-s}}(t-a)^m(b-t)^m \sum_{k=1}^{n} \xi_k t^{k-1}|_{t=t_i} = y(t_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

于是,由定理 3 得:

如果方程(35)(36)存在有界逆 K^{-1}[1]，且

$$\mu = \|K^{-1}\|(1 + \|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\|)\frac{r}{n} < 1,$$

那末有穷組 (39) 必有一意解 $\bar{x}^*$，且 $\tau\bar{x}^*$ 按 X 中的范数收斂于 (35) (36) 的解 x^* (如果 $\|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\|E_n(y) \to 0$)[2]，收斂的速率为

$$\|x^* - \tau\bar{x}^*\|_X = O\left\{\|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\|\left[\frac{1}{n} + E_n(y)\right]\right\},$$

其中 $\|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\|$ 的估值見(37)与(38).

(ii) 常微分方程的 Галеркин 方法[3]

考察方程

$$Kx = \frac{d}{dt}[p(t)x'(t)] + \frac{d}{dt}[q(t)x(t)] + r(t)x(t) = y(t), \tag{40}$$

并带有边界条件

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{41}$$

考察满足条件 $\omega_i(0) = \omega_i(1) = 0$ 的一組函数 $\{\omega_i(t)\}$，使函数 $\{\omega_i(t)\}$ 与等于 $\frac{1}{p(t)}$ 的函数所成的組是 L^2 中的完全函数組，并依权函数 $p(t)$ 正交就范.

我們欲将(40)(41)的解用形如下状的函数来逼近：

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k\,\omega_k(s),$$

卽取

$$\tau\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k\,\omega_k(s),\ \bar{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \bar{X}.$$

这里 $\bar{X}$ 为 n 維空間. 又取 $\bar{Y} = R_n$.

現在驗証条件(VI)与(V). 取 $\lambda = -1$;

$$Gx = \frac{d}{dt}[p(t)x'(t)];\ Tx = \frac{d}{dt}[q(t)x(t)] + r(t)x(t).$$

$\left(\text{于是 } G\tau\bar{x} \text{ 乃是形如 } \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} p(t)\,\omega_k'(t)\,\xi_k \text{ 的函数}\right)$. 而空間 X, Y 的取法見[1].

在[1]中已指出 Tx 可用形如 $\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} p(t)\,\omega_k'(t)\,\xi_k = (G\tau\bar{x})(t)$ 的函数按 Y 中的范数来逼近，卽条件(VI)滿足，其中 $\mu_1 \to 0$ (当 $n \to \infty$).

条件(V)也滿足，其中 $\theta \to 0$ (当 $n \to \infty$).

取

$$\sigma y = \left(-\int_0^1 y\omega_1\,dt,\ \cdots,\ -\int_0^1 y\omega_n\,dt\right).$$

1) 如果 λ 不是(35)(36)的固有值，那末可知有界逆 K^{-1} 存在.

2) 在[2]中如果只設 $p_k(t)$ 連續可微(一次)并当 $(t_1, \cdots, t_n)$ 为 Gauss 分点时，并不能得到这一方法的收斂性.

3) 这一方法在[1]中已論証过. 为了說明上述一般图式的应用，我們不妨重复敍述之.

容易算出 $\|\sigma\| \leqslant 1$. 又

$$\sigma G\tau\bar{x} = \left\{ -\int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n p(t)\,\omega_k'(t)\,\xi_k \right] \omega_i(t)\,dt \right\}_{1\leqslant i\leqslant n} = 0 \Longrightarrow \bar{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_n) = 0,$$

故 $(\sigma G\tau)^{-1}$ 存在. 此外显然 $\|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\| \leqslant 1$.

取 $\bar{T} = \sigma T\tau$, 于是条件(VII)中的 $v = 0$. 而近似方程(31)化为有穷組

$$\int_0^1 K\left[\sum_{k=1}^n \xi_k\,\omega_k(t)\right]\omega_i(t)\,dt = \int_0^1 y(t)\omega_i(t)\,dt \quad (1 \leqslant i \leqslant n.) \tag{42}$$

于是,由定理 3 得:

如果方程(40)(41)存在有界逆 K^{-1}, 且

$$\mu = 2\|K^{-1}\|\mu_1 < 1,$$

那末有穷組(42)必有一意解 $\bar{x}^*$, 且 $\tau\bar{x}^*$ (按 X 中的范数)收斂于(40)(41)的解 x^*, 收斂的速率为

$$\|x^* - \tau\bar{x}^*\|_X = O\{\mu_1 + \theta\}.$$

(iii) 积分方程的"混合方法"[1]

考察方程(1):

$$x(s) - \lambda\int_0^1 H(s, t)\,x(t)\,dt = y(s).$$

我們欲将(1)的解用形如下状的函数来逼近:

$$\sum_{k=1}^n \xi_k\,\omega_k(s),$$

即取

$$\tau\bar{x} = \sum_{k=1}^n \xi_k\,\omega_k(s),\ \bar{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \bar{X},$$

这里 $\bar{X}$ 为 n 維空間. 并取 $\bar{Y} = m_n$.

現在驗証条件(VI)与(V). 取

$$Gx = x;\ Tx = \int_0^1 H(s, t)\,x(t)\,dt.$$

取 $X = Y = C$.

因存在 $\int_0^1 V(s, t)\,x(t)\,dt = \int_0^1 \left[\sum_{k=1}^n \xi_k(t)\omega_k(s)\right] x(t)\,dt = \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 \xi_k(t)\,x(t)\,dt\right)\omega_k(s) =$
$= (\tau\bar{x})(s)$[2], 使

$$\|Tx - \tau\bar{x}\| = \max_s \left|\int_0^1 H(s, t)\,x(t)\,dt - \int_0^1 V(s, t)\,x(t)\,dt\right| \leqslant E_n^s(H)\|x\|,\ x \in X,$$

因此条件(VI)满足,其中 $\mu_1 = E_n^s(H)$.

条件 (V) 也满足. 事实上,存在 $\sum_{k=1}^n a_k\,\omega_k = \tau\bar{x}_0$, 使

$$\|y - \tau\bar{x}_0\| \leqslant E_n(y),$$

1) 这一方法在[1]中已論証过. 但利用定理 3 可給出較精确的估值,因此我們重复敍述之.

2) $V(s, t)$ 的意义見于 §1, 注 6.

即 $\beta = E_n(y)$.

取

$$\sigma y = [y(t_1), \cdots, y(t_n)].$$

显然$\|\sigma\| \leqslant 1$. 又,如果 ω_i 是三角函数,

$$\sigma\tau\bar{x} = \left\{\sum_{k=1}^{n} \xi_k \omega_k(t_i)\right\}_{1\leqslant i\leqslant n} = 0 \Longrightarrow \bar{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_k) = 0,$$

故存在 $(\sigma\tau)^{-1}$. 注意到 $[\tau(\sigma\tau)^{-1}\bar{y}](s) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \omega_k(s)$ 乃是满足

$$\sum_{k=1}^{n} \zeta_k \omega_k(t_i) = \eta_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

其中 $\bar{y} = (\eta_1, \cdots, \eta_n) \in \overline{Y}$, 于是当 t_k 是等距离分布时,

$$\|\tau(\sigma\tau)^{-1}\| \leqslant \log n + 4.$$

取 $\overline{T} = \sigma T\tau$, 于是条件(VII)中的 $\nu = 0$. 而近似方程(31)成为有穷組

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \omega_k(t_i) - \lambda \sum_{k=1}^{n} \xi_k \left(\int_0^1 H(t_i, t)\, \omega_k(t) dt\right) = y(t_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{43}$$

于是,由定理 3 得:

如果 λ 不是积分方程(1)的固有值,且

$$\mu = \|K^{-1}\| |\lambda| (5 + \log n) E_n^t(H) < 1,$$

那末有穷組(43)必有一意解 $\bar{x}^*$, 且

$$\|x^* - \tau\bar{x}^*\| = O\{\log n[E_n^t(H) + E_n(y)]\}^{1)}. \tag{44}$$

附注:

上面三例中的近似方程[即(39), (42), (43)]都是取(30)的形式,并沒有用到更一般的近似方程(31). 但从底下举的例子中则可看出,在上述一般图式中考虑更一般的近似方程(31)是必要的.

再考察积分方程(1):

$$x(s) - \lambda \int_0^1 H(s, t)\, x(t) dt = y(s).$$

現在取 $X = Y = \widetilde{C}$;

$$Gx = x;\ Tx = \int_0^1 H(s, t)\, x(t)\, dt.$$

我們欲将(1)的解用三角多項式来逼近,即取 $\tau\bar{x}$ 为 $n-1$ 阶三角多項式 $p(t)$, 它滿足 $p(t_i) = \xi_i\ (1 \leqslant i \leqslant n)$, 其中 $\bar{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \overline{X}$, 并取 $\overline{X} = \overline{Y} = m_n$.

現在驗証条件(VI)与(V). 由于存在 $\int_0^1 V(s, t)\, x(t) dt = (\tau\bar{x})(s)$, 使

$$\|Tx - \tau\bar{x}\| \leqslant E_n^t(H)\|x\|, \ x \in X,$$

因此条件(VI)滿足,其中 $\mu_1 = E_n^t(H)$.

条件(V)也滿足. 事实上,存在一个三角多項式

1) [1]中"(43)的解对(1)的解的近似程度"乃是 $O\{\log^2 n\,[E_n^t(M) + E_n(y)]\}$, 即不如估式(44)精确.

$$p_0(t) = (\tau\bar{x}_0)(t),$$

使

$$\|y - \tau\bar{x}_0\| \leqslant E_n(y),$$

即 $\theta = E_n(y)$.

取

$$\sigma y = [y(t_1), \cdots, y(t_n)].$$

显然 $\|\sigma\| \leqslant 1$. 又,按 τ 的定义有 $\sigma\tau\bar{x} = \bar{x}$. 故 $(\sigma\tau)^{-1} = I$,[1] 并且

$$\|\tau\| \leqslant \log n + 4.$$

取

$$\bar{T}\bar{x} = \left\{\sum_{k=1}^{n} A_k H(t_i, t_k)\xi_k\right\}_{1\leqslant i\leqslant n}, \ \bar{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \bar{X},$$

其中 $t_k = \dfrac{2k-1}{2n}$, $A_k = \dfrac{1}{n}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. 于是不难得出[令 $(\tau\bar{x})(t) = p(t)$]:

$$\|\bar{T}\bar{x} - \sigma T\tau\bar{x}\| = \|\bar{T}\sigma(\tau\bar{x}) - \sigma T(\tau\bar{x})\| =$$

$$= \max_i \left|\sum_{k=1}^{n} A_k H(t_i, t_k)\, p(t_k) - \int_0^1 H(t_i, t)\, p(t)\, dt\right| \leqslant 2E_n^t(H)\|\tau\bar{x}\|, \bar{x} \in \bar{X},$$

即条件(VII)满足,其中 $\nu = 2E_n^t(H)$.

这时近似方程(31)化为有穷組

$$\xi_i - \lambda\sum_{k=1}^{n} A_k H(t_i, t_k)\,\xi_k = y(t_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{45}$$

于是,由定理 3 得:

如果 λ 不是积分方程(1)的固有值,且[2]

$$\mu = 2\|K^{-1}\|\,|\lambda|^2\{ME_n^t(H) + M'E_n^t(H)\} < 1,$$

那末有穷組(45)必有一意解 $\bar{x}^*$, 且

$$\|x^* - \tau\bar{x}^*\| = O\{\log n[E_n^t(H) + E_n^t(H) + E_n(y)]\}.$$

III. 在内积空間的情形

仍考察方程(29):

$$Kx = Gx - \lambda Tx = y.$$

但設 Y 为内积空間[3], 并具有綫性无关的基 $\{Ge_k\}$ $(e_k \in D_G,\ k = 1, 2, \cdots)$. 并設 $\bar{X}$ 与 $\bar{Y}$ 都是 n 維空間. 这时上述一般图式可以簡化,即近似方程(31)可以直接列出来.

我們欲将(29)的解用 $\{e_k\}$ 中的元的有穷綫性組合来逼近,即取

$$\tau\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k, \ \bar{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \bar{X}.$$

(于是 $G\tau\bar{x}$ 乃是形如 $\sum_{k=1}^{n} \xi_k Ge_k$ 的元素)

現在驗証条件(VI)与(V). 設 T 为全連續算子,于是,存在 $\zeta_1, \cdots, \zeta_n$, 使

1) I 表示 $\bar{X}$ 中的不变算子.
2) 这里利用 §1, 注 6 中的結果.
3) 即 Y 不必是完备的 Hilbert 空間.

$$\|Tx - G\tau\bar{x}\| = \|Tx - \sum_{k=1}^{n} \zeta_k Ge_k\| \leqslant \mu_{1,n}\|x\|, x \in X.$$

因此条件(VI)满足，其中 $\mu_{1,n} \to 0$ (当 $n \to \infty$).

条件(V)也满足. 事实上，存在 $a_1, \cdots, a_n$，使

$$\|y - G\tau\bar{x}_0\| = \|y - \sum_{k=1}^{n} a_k Ge_k\| \leqslant \theta_n,$$

其中 $\theta_n \to 0$ (当 $n \to \infty$).

取

$$\sigma y = [(y, Ge_1), \cdots, (y, Ge_n)].$$

这时

$$\sigma G\tau\bar{x} = \left\{\sum_{k=1}^{n} \xi_k(Ge_k, Ge_i)\right\}_{1\leqslant i\leqslant n} = 0 \Longrightarrow \bar{x} = (\xi_1, \cdots, \xi_n) = 0,$$

故存在 $(\sigma G\tau)^{-1}$. 注意到 $G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\sigma y = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k Ge_k$ 満足

$$\sigma[G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\sigma y] = \sigma y,$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} \zeta_k(Ge_k, Ge_i) = (y, Ge_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

于是 $\|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\sigma y\| = \left\|\sum_{k=1}^{n} \zeta_k Ge_k\right\| \leqslant \|y\|$，或

$$\|G\tau(\sigma G\tau)^{-1}\sigma\| \leqslant 1.$$

取 $\bar{T} = \sigma T\tau$. 于是条件(VII)中的 $v = 0$. 而近似方程(31)成为有穷組

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k(Ke_k, Ge_i) = (y, Ge_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{46}$$

于是，由定理 3 得:

設 T 是全連續算子，并設

$$\|x\| \leqslant \rho\|Kx\|, x \in D_G,$$

并且

$$\mu = 2\rho|\lambda|\mu_{1,n} < 1,$$

那末有穷組(46)必有一意解 $\bar{x}^*$，且 $\tau\bar{x}^*$(按 X 中的范数)收斂于(29)的解 x^*，收斂的速率为

$$\|x^* - \tau\bar{x}^*\| = O\{\mu_{1,n} + \theta_n\}.$$

附注:

上述方法在偏微分方程(椭圓型)中的某些实現，在 С. Г. Михлин 的书[3]中有詳細的研究.

参 考 文 献

[1] Канторович, Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика, *Успехи матем. наук*, 3:6 (1948), 89—185.

[2] Карпиловская, Э. Б., О сходимости интерполяционного метода для обыкновенных дифференциальных уравнений, *Успехи матем. наук*, 8:3 (1953), 111—118.

[3] Михлин, С. Г., *Прямые методы в математической физике*, М.—Л., Гостехиздат 1950.

[4] Соболев, С. Л., *Изв. АН СССР, сер. матем.* 20 (1956), 413—436.

論素数的最小正原根*

王 元
(中国科学院数学研究所)

§1. 引 言

命 p 表示素数**, $g(p)$ 表示模 p 的最小正原根, $w(n)$ 表示 n 的互异的素因子的个数. 記 $w(p-1)=m$. И. М. Виноградов[1]首先証明了:

$$g(p) < 2^m p^{\frac{1}{2}} \log p. \tag{1}$$

其后, 他自己[2]将 (1) 改进为 $g(p) < 2^m p^{\frac{1}{2}} \log\log p$, 华罗庚[3]得到 $g(p) < 2^{m+1}\sqrt{p}$, P. Erdös[4]得到 $g(p) = O(p^{\frac{1}{2}} \log^{17} p)$, P. Erdös 与 H. N. Shapiro[5]得到 $g(p) = O(m^c p^{\frac{1}{2}})$, 此处 c 是一个絕对正常数.

关于 $g(p)$ 下界的估計, P. Turán[6]証明了:

$$g(p) = \Omega(\log p). \tag{2}$$

此外,在假定了广义 Riemann 猜測之下, Ankeny[7]証明了:

$$g(p) = O(2^m \log^2 p \log^2(2^m \log^2 p)). \tag{3}$$

由于 $w(n) = \Omega\left(\frac{\log 2n}{\log\log 3n}\right)$,所以(2)与(3)就无穷大阶来說,似乎还有一定的距离.

本文的宗旨在于証明作者在[8]內宣布的两个結果(分别改善了(1)与(3)):

定理 1. 对于任何 $\varepsilon > 0$,

$$g(p) = O(p^{\frac{1}{4}+\varepsilon}), \tag{4}$$

此处与"O"有关的常数仅与 ε 有关.

注意, 現在主阶 $\frac{1}{2}$, 已經改进成为 $\frac{1}{4}$ 了.

定理 2. 在广义 Riemann 猜測之下,

$$g(p) = O(m^6 \log^2 p), \tag{5}$$

由于 $w(n) = O\left(\frac{\log 2n}{\log\log 3n}\right)$. 故(2)与(5)的阶已經很相近了,它們之間的差别只在于 $\log p$ 的方次問題.

作者对华罗庚教授的指导与帮助,致以最衷心的感謝.

§2. 特 征 和

本节的目的在于証明:

* 1959 年 5 月 4 日收到.

** 本文中以 $p, q; p_1, p_2, \cdots$ 表示素数,不一一說明.

定理 A. 命 δ 是不超过 $\frac{1}{6}$ 的一个正数，則当 $p > P(\delta)$ 及 $H > p^{\frac{1}{4}+\delta}$ 时，对任何整数 N，皆有

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+H} \chi(n)\right| < \frac{H}{p^{\eta}}, \tag{6}$$

此处 $\eta = \frac{\delta^2}{6}$，而 χ 为模 p 的非主特征.

定理 A 的証明依賴于以下諸引.

引 1. 命 $[p]$ 为 p 个元素的体，命 $f_1(x), \cdots, f_r(x)$ 为 $[p]$ 上的正則*，既約，且两两互异的多項式，其次数分别是 $k_1, \cdots, k_r$. 命 $K = k_1 + \cdots + k_r$. 又命 $\chi_1, \cdots, \chi_r$ 是 $[p]$ 上的非主特征. 則

$$\left|\sum_{x} \chi_1(f_1(x)) \cdots \chi_r(f_r(x))\right| \leqslant (K-1)\sqrt{p},$$

此处 x 过模 p 的一个完全剩余系.

証明見 A. Weil[9] 及 H. Davenport[10].

引 2. 命 r 为正整数，$1 < h < p$ 为某个整数.

命

$$S_h(x) = \sum_{m=1}^{h} \chi(x+m),$$

則

$$\sum_{x} |S_h(x)|^{2r} < (2r)^{7r} p h^r + 2r\sqrt{p}\, h^{2r}.$$

証. 若 $\chi(n)$ 为模 p 的 $d(>1)$ 次特征，則

$$\sum_{x} |S_h(x)|^{2r} = \sum_{m_1=1}^{h} \cdots \sum_{m_r=1}^{h} \sum_{n_1=1}^{h} \cdots \sum_{n_r=1}^{h} \sum_{x} \chi((x+m_1)\cdots(x+m_r))\bar{\chi}((x+n_1)\cdots(x+n_r)).$$

将 $\{m_1, \cdots, m_r, n_1, \cdots, n_r\}$ $(1 \leqslant m_i \leqslant h, 1 \leqslant n_i \leqslant h, 1 \leqslant i \leqslant r)$ 分成两类 $\mathfrak{S}_1$ 及 $\mathfrak{S}_2$. $\mathfrak{S}_1$ 包含那些 $\{m_1, \cdots, m_r, n_1, \cdots, n_r\}$，滿足：$n_{i_1} = m_{j_1}, \cdots, n_{i_s} = m_{j_s}$，其余則 $n_{i_t} \neq m_{j_u}$ $(s+1 \leqslant t, u \leqslant r)$，而 $\{n_{i_{s+1}}, \cdots, n_{i_r}\}$ 及 $\{m_{j_{s+1}}, \cdots, m_{j_r}\}$ 中每个数重复的次数都是 d 的倍数，此处 $(i_1, \cdots, i_r)$ 及 $(j_1, \cdots, j_r)$ 都是 $(1, \cdots, r)$ 的排列. 其余的都属于 $\mathfrak{S}_2$.

$\mathfrak{S}_1$ 的元素的个数不超过

$$\sum_{s=1}^{r} {}_rC_s^2 h^s \left(\sum_{t=1}^{[\frac{r-s}{d}]} {}_{[\frac{r-s}{d}]}C_t\, h^t \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_t=[\frac{r-s}{d}] \\ l_i>0}} 1\right)^2 <$$

$$< r^{6r} \sum_{s=1}^{r} h^s \left(\sum_{t=1}^{[\frac{r-s}{d}]} h^t\right)^2 = r^{6r} \sum_{s=1}^{r} h^s \left(\frac{h^{[\frac{r-s}{d}]+1} - h}{h-1}\right)^2 <$$

$$< r^{6r} \sum_{s=1}^{r} h^s \left(\frac{h^{[\frac{r-s}{d}]+1}}{\frac{h}{2}}\right)^2 = 4r^{6r} \sum_{s=1}^{r} h^s h^{2[\frac{r-s}{d}]} < (2r)^{7r} h^r.$$

* 首項系数为 1 的多項式，称为正則多項式.

用最簡单的估計,可知 $\mathfrak{S}_2$ 的元素的个数不超过 h^{2r}.

由

$$\sum_x |S_h(x)|^{2r} = \sum_{\mathfrak{S}_1}\sum_x \chi((x+m_1)\cdots(x+m_r))\bar{\chi}((x+n_1)\cdots(x+n_r)) +$$

$$+ \sum_{\mathfrak{S}_2}\sum_x \chi((x+m_1)\cdots(x+m_r))\bar{\chi}((x+n_1)\cdots(x+n_r)) = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

显然可得

$$|\Sigma_1| < (2r)^{7r}\, p\, h^r.$$

又

$$|\Sigma_2| = \left|\sum_{\mathfrak{S}_2}\sum_x \chi((x+m_1)^{l_1}\cdots(x+m_j)^{l_j})\,\bar{\chi}((x+n_1)^{f_1}\cdots(x+n_k)^{f_k})\right|,$$

此处 $1 \leqslant l_s < d$, $1 \leqslant f_t < d$, $m_s \neq n_t$ $(1 \leqslant s \leqslant j,\ 1 \leqslant t \leqslant k,\ 1 \leqslant j,\ k \leqslant r)$ 又当 $s \neq t$ 时 $m_s \neq m_t$, $n_s \neq n_t$.

命 $\chi^{l_s} = \chi_s\ (1 \leqslant s \leqslant j)$, $\bar{\chi}^{f_t} = \chi_{j+t}\ (1 \leqslant t \leqslant k)$. 則諸 $\chi_i (1 \leqslant i \leqslant j+k)$ 皆非主特征,故由引 1 可知

$$|\Sigma_2| = \left|\sum_{\mathfrak{S}_2}\sum_x \chi_1(x+m_1)\cdots\chi_{j+k}(x+m_{j+k})\right| \leqslant$$

$$\leqslant h^{2r}(2r-1)\sqrt{p} < h^{2r}\, 2r\sqrt{p}.$$

故明所欲証.

对于整数 $H > 0$, $q > 0$, t, N, 确定区間 $I(q, t)$:

$$\frac{N+tp}{q} < z \leqslant \frac{N+H+tp}{q}. \tag{7}$$

引 3. 若集合 Φ 表示含有 Q 个两两互素的整数的集合, Φ 中元素 q 还满足:

$$q_1 < q < q_2, \quad 2H q_2 < p.$$

当給了 p, N, H 之后,对于每个 $q \in \Phi$, 有 t 的集合 $T(q)$, 此处 $0 \leqslant t < q$, $T(q)$ 共 $q - Q$ 个元素,对于所有 Φ 中的 q 及 $T(q)$ 中的 t, 区間 $I(q, t)$ 之間沒有公共整数.

証明見 D. A. Burgess[11].

定理 A 的証明: 由 G. Pólya[12] 定理可知,我們可以假定

$$p^{\frac{1}{4}+\delta} < H < p^{\frac{1}{2}+\delta}, \tag{8}$$

此处 δ 为不超过 $\frac{1}{6}$ 的任何正数. 若适合(8)的 H 及某个整数 N, 有

$$\left|\sum_{n=N+1}^{N+H}\chi(n)\right| \geqslant \frac{H}{p^{\eta}}.$$

当 $p > P(\delta)$ 时,我們将由此导出一个矛盾.

对于 $q < p$, 有

$$\sum_{n=N+1}^{N+H}\chi(n) = \sum_{t=0}^{q-1}\sum_{\substack{n=N+1\\ n\equiv -tp \pmod q}}^{N+H}\chi(n) = \sum_{t=0}^{q-1}\sum_{z\in I(q,t)}\chi(z).$$

故得

$$\sum_{t=0}^{q-1}\left|\sum_{z\in I(q,t)}\chi(z)\right|\geqslant\frac{H}{p^{\eta}}. \tag{9}$$

应用引 3，命 q 是經过区間

$$p^{\frac{3}{4}}-\frac{p^{\frac{3}{4}}}{p^{\eta}}<q<p^{\frac{3}{4}} \tag{10}$$

内所有的素数．記此区間内素数的个数为 Q，則由 A. E. Ingham[13] 定理可知

$$Q=\pi(p^{\frac{3}{4}})-\pi\left(p^{\frac{3}{4}}-\frac{p^{\frac{3}{4}}}{p^{\eta}}\right)=\frac{4p^{\frac{3}{4}-\eta}}{\log p}(1+o(1)). \tag{11}$$

关于(10)内所有的 q 求和，得

$$\sum_{q}\sum_{t\in T(q)}\left|\sum_{z\in I(q,t)}\chi(z)\right|\geqslant\frac{HQ}{p^{\eta}}-\sum_{q}2HQ\,q^{-1}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{HQ}{p^{\eta}}-2HQ^{2}\cdot 2p^{-\frac{3}{4}}>\frac{HQ}{2p^{\eta}}\quad(p>P_{1}(\delta)).$$

将上式改写成为

$$\sum_{I}\left|\sum_{z\in I}\chi(z)\right|>\frac{HQ}{2p^{\eta}} \tag{12}$$

由于

$$\sum_{n\in I}\sum_{m=1}^{h}\chi(n+m)=h\sum_{z\in I}\chi(z)+\sum_{m=1}^{h}\varphi_{m},$$

此处 $|\varphi_{m}|\leqslant 2m$，又由于 $I(q,t)$ 的个数不超过 $p^{\frac{3}{4}}Q$，故

$$\sum_{I}\sum_{n\in I}|S_{h}(n)|>\frac{HQh}{2p^{\eta}}-2p^{\frac{3}{4}}Qh^{2}.$$

置

$$h=\left[\frac{Hp^{-\frac{3}{4}}}{8p^{\eta}}\right].$$

則

$$\sum_{I}\sum_{n\in I}|S_{h}(n)|>\frac{HQh}{4p^{\eta}}$$

每个 $I(q,t)$ 中整数的个数都不超过 $3p^{-\frac{3}{4}}H$，故由 Hölder 不等式，得

$$\sum_{I}\sum_{n\in I}|S_{h}(n)|^{2r}>\left(\frac{1}{4p^{\eta}}HQh\right)^{2r}(p^{\frac{3}{4}}Q\cdot 3p^{-\frac{3}{4}}H)^{1-2r}.$$

由引 3 得

$$\sum_{x}|S_{h}(x)|^{2r}>\left(\frac{1}{12p^{\eta}}\right)^{2r}HQh^{2r}.$$

又由引 2 得知，当 $p>P_{1}$ 时

$$\left(\frac{1}{12p^{\eta}}\right)^{2r}HQh^{2r}<p(2r)^{7r}h^{r}+2r\sqrt{p}\,h^{2r}.$$

当 $p>P_{2}(\delta)>P_{1}$ 时，取 $r=\left[\frac{2}{\delta}\right]+1$．則

$$h^{r}\geqslant\left(\frac{p^{\delta}}{9p^{\eta}}\right)^{r}>p^{\frac{\delta r}{2}}>p,$$

及

$$\left(\frac{1}{12p^{\eta}}\right)^{2r} HQ\, h^{2r} < 3r\sqrt{p}\, h^{2r}. \tag{13}$$

由于

$$\delta - 2r\eta - 2\eta = \delta - 2\left(\left[\frac{2}{\delta}\right] + 2\right)\frac{\delta^2}{6} \geqslant \delta - \frac{4}{6}\delta - \delta^2 \geqslant \frac{1}{6}\delta, \tag{14}$$

故当 $p > P_3(\delta) > P_2$ 时,由(8),(11)及(14)可知(13)是不可能的,故得定理.

§3. 積論特征和

本节之目的,在于証明:

定理 B. 命 χ 表示模 p 的非主特征,則在广义 Riemann 猜测之下,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\chi(n)e^{-\frac{n}{x}} = O(x^{\frac{1}{3}}\log p). \tag{15}$$

証. 习知存在 T_m,适合

$$m < T_m < m+1 \quad (m \text{ 为整数})$$

及

$$\frac{L'}{L}(\sigma + iT_m, \chi) = O(\log^2 p(|T_m| + 1)) \quad \left(\frac{1}{3} \leqslant \sigma \leqslant 2\right).$$

又在广义 Riemann 猜测之下,习知

$$\frac{L'}{L}\left(\frac{1}{3} + it, \chi\right) = O(\log p(|t| + 1)).$$

由于当 $\frac{1}{3} \leqslant \sigma \leqslant 2$, $|t| \geqslant 1$ 时

$$\Gamma(s) = O\left(e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\,|t|^{\sigma - \frac{1}{2}}\right).$$

故当 $m > 0$ 时

$$\int_{2+iT_m}^{2+i\infty} \Gamma(s)x^s\frac{L'}{L}(s,\chi)\,ds = O\left(x^2\int_{T_m}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}t}\,t^2\,dt\right) = o(1) \quad (\text{当 } m \to \infty),$$

$$\int_{2-i\infty}^{2-iT_m} \Gamma(s)x^s\frac{L'}{L}(s,\chi)ds = o(1) \quad (\text{当 } m \to \infty),$$

及

$$\int_{\frac{1}{3}}^{2} \Gamma(\sigma \pm iT_m)\frac{L'}{L}(\sigma \pm iT_m, \chi)x^s\,ds = O\left(x^2\log^2 p(|T_m| + 1)e^{-\frac{\pi}{2}|T_m|}\,|T_m|^{\frac{3}{2}}\right) =$$

$$= o(1) \quad (\text{当 } m \to \infty).$$

因此,由 Mellin 变换及 Cauchy 定理得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\chi(n)e^{-\frac{n}{x}} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Gamma(s)\,x^s\frac{L'}{L}(s,\chi)ds =$$

$$= \sum_{\rho} x^{\rho}\Gamma(\rho) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{3}-i\infty}^{\frac{1}{3}+i\infty} x^s\Gamma(s)\frac{L'}{L}(s,\chi)\,ds =$$

$$= \sum_{\rho} x^{\rho}\Gamma(\rho) + O(x^{\frac{1}{3}}\log p),$$

此处 ρ 經过 $L(s,\chi)$ 所有的非无聊的零点. 由于适合 $n \leqslant \gamma = \mathscr{I}(\rho) \leqslant n+1$ 的 $L(s,\chi)$ 的零点个数为 $O(\log p(|n|+1))$. 故

$$\sum_{\rho} x^{\rho}\Gamma(\rho) = O\left(x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{n\leqslant\gamma\leqslant n+1}\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\gamma\right)\right|\right) =$$

$$= O\left(x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2}n}\log p(n+1)\right) = O(x^{\frac{1}{2}}\log p),$$

明所欲証.

§4. 篩　　法

当 $(Q; p_1\cdots p_s)=1$ 时, 以 $P(Q; p_1, \cdots, p_s)$ 表示适合下面条件的 a_n 之和

$$n \geqslant 1,\ \text{ind}\ n \not\equiv 0 (\text{mod}\ p_i) \quad (1\leqslant i\leqslant s),\ \text{ind}\ n \equiv 0(\text{mod}\ Q)^*, \tag{16}$$

此处 a_n 为非負实数, $p_1 < \cdots < p_s$ 为素数. 特别 $P(T)$ 表示适合

$$n \geqslant 1,\ \text{ind}\ n \equiv 0(\text{mod}\ T) \tag{17}$$

的 a_n 的和.

$P(Q; p_1, \cdots, p_{s+1})$ 为适合 (16) 的 a_n 之和減去适合

$$\begin{aligned} &n \geqslant 1,\ \text{ind}\ n \not\equiv 0\ (\text{mod}\ p_i) \quad (1\leqslant i\leqslant s), \\ &\text{ind}\ n \equiv 0\ (\text{mod}\ Q),\ \text{ind}\ n \equiv 0\ (\text{mod}\ p_{s+1}) \end{aligned} \tag{18}$$

的 a_n 之和, 将条件

$$\text{ind}\ n \equiv 0(\text{mod}\ Q)$$

与

$$\text{ind}\ n \equiv 0(\text{mod}\ p_{s+1})$$

合併成为

$$\text{ind}\ n \equiv 0(\text{mod}\ Q\, p_{s+1}).$$

故得

$$P(Q; p_1, \cdots, p_{s+1}) = P(Q; p_1, \cdots, p_s) - P(Q\, p_{s+1}; p_1, \cdots, p_s).$$

反复运用上式, 则得

$$P(Q; p_1, \cdots, p_r) = P(Q) - \sum_{a=1}^{r} P(Q\, p_a; p_1, \cdots, p_{a-1}). \tag{19}$$

引进正整数列:

$$r = r_0 \geqslant r_1 \geqslant \cdots \geqslant r_t.$$

則由(19)可知

$$P(Q; p_1, \cdots, p_r) \geqslant P(Q) - \sum_{a\leqslant r} P(Qp_a) + \sum_{a\leqslant r}\sum_{\substack{a_1\leqslant r_1\\ a_1<a}} P(Q\, p_a p_{a_1}; p_1, \cdots, p_{a_1-1}), \tag{20}$$

連續运用(20)式 t 次, 并注意

$$P(Qp_a\, p_{a_1}\cdots p_{a_t}\, p_{\beta_t}; p_1\cdots p_{\beta_t-1}) \leqslant P(Qp_a\cdots p_{\beta_t}).$$

故得

---

* 对于模 p 的一个原根 g, 則习知对于任何 $(n, p)=1$, 必有 a 滿足

$$g^a \equiv n(\text{mod}\ p).$$

一般記 $a = \text{ind}_g\, n$, 在此是对于固定的 g 而言的, 簡記为 $\text{ind}\ n = a$.

又当 $(p, n) > 1$ 时, 恆規定 $a_n = 0$.

$$\left.\begin{aligned} P(Q; p_1, \cdots, p_r) \geqslant P(Q) - \sum_{\alpha\leqslant r} P(Qp_\alpha) + \sum_{\substack{\alpha\leqslant r}} \sum_{\substack{\alpha_1\leqslant r_1 \\ \alpha_1<\alpha}} P(Qp_\alpha p_{\alpha_1}) - \\ - + \cdots - \sum_{\alpha\leqslant r} \sum_{\alpha_1\leqslant r_1} \sum_{\substack{\beta_1\leqslant r_1 \\ \alpha>\alpha_1>\cdots>\beta_t}} \sum_{\alpha_2\leqslant r_2} \cdots \sum_{\beta_t\leqslant r_t} P(Q p_\alpha p_{\alpha_1} \cdots p_{\beta_t}). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

若有与T无关的a_n的函数M与N,使下式成立:

$$P(T) = \frac{M}{T} + O(N), \tag{22}$$

此处与"O"有关的常数为絕对常数,則由(21),(22)得

$$P(Q; p_1, \cdots, p_r) \geqslant \frac{EM}{Q} - KR|N| \qquad (K > 0),$$

其中

$$E = 1 - \sum_{\alpha\leqslant r} \frac{1}{p_\alpha} + \sum_{\alpha\leqslant r} \sum_{\substack{\alpha_1\leqslant r_1 \\ \alpha>\alpha_1}} \frac{1}{p_\alpha p_{\alpha_1}} - + \cdots -$$

$$- \sum_{\alpha\leqslant r} \sum_{\alpha_1\leqslant r_1} \sum_{\substack{\beta_1\leqslant r_1 \\ \alpha>\alpha_1>\cdots>\beta_t}} \sum_{\alpha_2\leqslant r_2} \cdots \sum_{\beta_t\leqslant r_t} \frac{1}{p_\alpha p_{\alpha_1} \cdots p_{\beta_t}},$$

$$R \leqslant 1 + \sum_{\alpha\leqslant r} 1 + \sum_{\alpha\leqslant r} \sum_{\substack{\alpha_1\leqslant r_1 \\ \alpha>\alpha_1}} 1 + \cdots + \sum_{\alpha\leqslant r} \sum_{\alpha_1\leqslant r_1} \sum_{\substack{\beta_1\leqslant r_1 \\ \alpha>\alpha_1>\cdots>\beta_t}} \sum_{\alpha_2\leqslant r_2} \cdots \sum_{\beta_t\leqslant r_t} 1 \leqslant$$

$$\leqslant r \prod_{i=1}^{t} (1 + r_i)^2.$$

取$r, r_1, \cdots, r_t$如G. Ricci[14] 所示,則得

引4. 若(22)成立,則存在正常数σ使

$$P(Q; p_1, \cdots, p_r) \geqslant \frac{\sigma M}{Q} \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) + O\,(p_r^{2.99}|N|).$$

§5. 定理1的証明

取$x = p^{\frac{3}{4}+\varepsilon}$ $\left(0 < \varepsilon < \frac{1}{6}\right)$,則由定理$A$得

$$\sum_{n=1}^{x} \chi(n) = O\left(\frac{x}{p^\zeta}\right) \quad \left(\zeta = \frac{\varepsilon^2}{6}\right). \tag{23}$$

此处χ为模p的非主特征.

当$q|p-1$时,記χ_q为模p的q次特征,則由(23)得

$$\sum_{\substack{\operatorname{ind} n\equiv 0 \pmod q \\ n\leqslant x}} 1 = \frac{1}{q} \sum_{n\leqslant x} \sum_{\chi_q} \chi_q(n) = \frac{x}{q} + O\left(\frac{x}{p^\zeta}\right). \tag{24}$$

記

$$P = \prod_{q|p-1} q, \quad P_1 = \prod_{\substack{q|p-1 \\ q \leqslant \log^2 p}} q.$$

命 $N(x)$ 表示不超过 x 的正原根的个数，則

$$N(x) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (\mathrm{ind}\, n, P)=1}} 1 \geqslant \sum_{\substack{n \leqslant x \\ (\mathrm{ind}\, n, P_1)=1}} 1 - \sum_{\substack{q|p-1 \\ q>\log^2 p}} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ \mathrm{ind}\, n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, q)}} 1 = \Sigma_1 - \Sigma_2$$

由(24)可知

$$\Sigma_2 = O\Big(\sum_{\substack{q|p-1 \\ q>\log^2 p}} \frac{x}{q}\Big) + O\Big(\sum_{\substack{q|p-1 \\ q>\log^2 p}} \frac{x}{p^{\zeta}}\Big) = O\Big(\frac{x}{\log p}\Big).$$

取

$$a_n = \begin{cases} 1, & 若\, n \leqslant x; \\ 0, & 若\, n > x. \end{cases}$$

由于(24)，故由引 4 可知

$$\Sigma_1 > \sigma x \prod_{\substack{q|p-1 \\ q \leqslant \log^2 p}} \Big(1 - \frac{1}{q}\Big) + O\Big(\log^6 p \cdot \frac{x}{p^{\zeta}}\Big) > \alpha \frac{x}{\log \log p} \quad (\alpha > 0,\ p > P_1(\varepsilon)).$$

因此

$$N(x) > \beta \frac{x}{\log \log p} \qquad (\beta > 0,\ p > P_2(\varepsilon)).$$

故得定理 1.

§6. 定理 2 的証明

当 $d|p-1$ 时，以 n_d 表示模 p 的 d 次剩余，則

$$G_d(x) = \sum_{n_d \geqslant 1} \Lambda(n_d) e^{-\frac{n_d}{x}} = \frac{1}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) e^{-\frac{n}{x}} \sum_{\chi_d} \chi_d(n) =$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{\substack{n=1 \\ p \nmid n}}^{\infty} \Lambda(n) e^{-\frac{n}{x}} + \frac{1}{d} \sum_{\chi_d}{}' \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \chi_d(n) e^{-\frac{n}{x}},$$

此处 $\sum_{\chi_d}{}'$ 表示通过主特征以外的所有 d 次特征求和. 故由定理 B 得

$$G_d(x) = \frac{1}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) e^{-\frac{n}{x}} + O(x^{\frac{1}{2}} \log p). \tag{25}$$

习知当 $x \geqslant 2$ 时，有絕对正常数 c_1, c_2 使

$$c_1 x \leqslant \psi(x) \leqslant c_2 x, \tag{26}$$

又由分部求和法及(26)可得：当 $c_3 > 1$ 时，

$$\sum_{n > c_3 x} \Lambda(n) e^{-\frac{n}{x}} \leqslant c_2 e^{-c_3} (c_3 + 1) x, \tag{27}$$

$$\sum_{n \leqslant c_3 x} \Lambda(n) e^{-\frac{n}{x}} \leqslant c_2 c_3 x, \tag{28}$$

及

$$\sum_{n\leqslant c_3x}\Lambda(n)e^{-\frac{n}{x}}\geqslant e^{-1}c_1x. \tag{29}$$

記

$$P=\prod_{q\mid p-1}q,\ P_1=\prod_{\substack{q\mid p-1\\ q\leqslant c_4m\log 4m}}q\quad(c_4\geqslant 2).$$

命

$$N(x)=\sum_{n}\Lambda(n)e^{-\frac{n}{x}},$$

此处通过模 p 所有的正原根求和，由定理 B 可知

$$N(x)=\sum_{\substack{n=1\\(\operatorname{ind}n,P)=1}}^{\infty}\Lambda(n)e^{-\frac{n}{x}}\geqslant\sum_{\substack{n=1\\(\operatorname{ind}n,P_1)=1}}^{\infty}\Lambda(n)e^{-\frac{n}{x}}-\sum_{\substack{q\mid p-1\\ q>c_4m\log 4m}}G_q(x)=$$

$$=M(x)-\sum_{\substack{q\mid p-1\\ q>c_4m\log 4m}}\frac{1}{q}H(x)+O(mx^{\frac{1}{2}}\log p), \tag{30}$$

此处

$$M(x)=\sum_{\substack{n=1\\(\operatorname{ind}n,P_1)=1}}^{\infty}\Lambda(n)e^{-\frac{n}{x}},\ H(x)=\sum_{\substack{n=1\\ p\nmid n}}^{\infty}\Lambda(n)e^{-\frac{n}{x}}. \tag{31}$$

取

$$a_n=\begin{cases}\Lambda(n)e^{-\frac{n}{x}}, & 若\ p\nmid n;\\ 0, & 若\ p\mid n.\end{cases}$$

由(25)及引 4 可知

$$M(x)\geqslant\sigma\prod_{q\mid P_1}\left(1-\frac{1}{q}\right)H(x)+O((c_4m)^{2.991}x^{\frac{1}{2}}\log p)\quad(\sigma>0).$$

$$\geqslant\frac{\alpha H(x)}{\log c_4m}+O((c_4m)^{2.991}x^{\frac{1}{2}}\log p)\quad(\alpha>0), \tag{32}$$

此处之 α（及以后的 β,γ）是絕对常数.

取 c_3 充分大，由(27)，(28)，(29)得

$$H(x)\leqslant\sum_{n\leqslant c_3x}\Lambda(n)e^{-\frac{n}{x}}+\sum_{n>c_3x}\Lambda(n)e^{-\frac{n}{x}}\leqslant 2c_2c_3x,$$

$$H(x)\geqslant\sum_{n\leqslant c_3x}\Lambda(n)e^{-\frac{n}{x}}\geqslant e^{-1}c_1x.$$

取 $c_4=c_4(c_3)$ 充分大，由(30)，(32)得

$$N(x)\geqslant\frac{\alpha e^{-1}c_1x}{\log c_4\cdot\log 4m}-\frac{2c_2c_3x}{c_4\log 4m}+O((c_4m)^{2.991}x^{\frac{1}{2}}\log p)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\beta x}{\log c_4\cdot\log 4m}+O((c_4m)^{2.991}x^{\frac{1}{2}}\log p)\quad(\beta>0). \tag{33}$$

又

$$N(x) = \sum_{n < c_5 x \log 4m} \Lambda(n) e^{-\frac{n}{x}} + \sum_{n > c_5 x \log 4m} \Lambda(n) e^{-\frac{n}{x}} = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

由(27)可知

$$\Sigma_2 \leqslant c_2 e^{-c_5 \log 4m}(c_5 \log 4m + 1)x.$$

取 $c_5 = c_5(c_4)$ 充分大，由(33)得

$$\Sigma_1 \geqslant \frac{\gamma x}{\log c_4 \cdot \log 4m} + O((c_4 m)^{2.991} x^{\frac{1}{2}} \log p) \quad (\gamma > 0).$$

取 $c_6 = c_6(c_4)$ 充分大，及

$$x = c_6 m^{5.99} \log^2 p, \tag{34}$$

則得

$$\Sigma_1 > 0.$$

卽

$$g(p) \leqslant c_5 x \log 4m,$$

故得定理 1.

参　考　文　献

[1] Cf. E. Landau, *Vorlesungen über Zahlen Theorie*, II. (1927), 178, Leipzig.

[2] Виноградов, И. М., О наименьшем первообразном корне, *ДАН СССР*, (1930), 7—11.

[3] Hua, L. K., On the least primitive root of a prime, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 48 (1942), 726—730.

[4] Erdös, P., On the least primitive root of a prime, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 51 (1945), 131—132.

[5] Erdös, P. and H. N. Shapiro, On the least primitive root of a prime, *Pacific Jour. Math.*, 7 (1957), 861—865.

[6] Turán, P., Soviet result in number theory, *Math. Lapok* (1950), 243—266.

[7] Ankeny, N. C., The least quadratic non-residue, *Ann. Math.*, 55 (1952), 65—72.

[8] 王元，关于素数的最小正原根，科学記录，新輯 3 卷 5 期(1958).

[9] Weil, A., Sur les courbes algébriques et les variétés qui sén déduisent, *Pub. Inst. Math. Strasbourg* (N. S; Nr. 2), (1948), 1—85.

[10] Davenport, H., On character sums in fiuite fields, *Acta Math.*, 71 (1939), 99—122.

[11] Burgess, D. A., The distribution of quadratic residues and non-residues, *Mathematica*, London, 4 (1957), 106—112.

[12] Pólya, G., Über die Verteilung der quadratischen Reste und Nichtreste, Nachr. Wiss. Gött. (1918), 21—29.

[13] Ingham, A. E., On the difference between consecutive primes, *Quart. Jour. Math. Oxford*, 8 (1937), 255—266.

[14] Ricci, G., Sur la congettura di Goldbach e la costante di Schnirelmann, *Ann. del. R. Scu. Nor. Sup. di Pisa*, 6 (1937), 70—115.

第9卷 第4期　　数 学 学 报　　Vol. 9, No. 4
1959 年 12 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Dec., 1959

二阶常微分方程組的解的全局稳定性*

張 炳 根
(山东海洋学院数学教研組)

§1. 預备知識[1]

(A) 設

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad i = 1, 2, \cdots, n, \tag{1}$$

X_i 是变元 $x_1 \cdots x_n$ 的連續可微函数,在 $-\infty < x_i < +\infty \ (i = 1, 2, \cdots, n)$,

$$X_i(0, 0, \cdots, 0) = 0$$

称組 (1) 的平凡解为全局漸近稳定,若它在李雅普諾夫意义下稳定(在足够小的扰动下),且組(1)的任意其他解 $x_i(t)$ 具性質 $\lim\limits_{t\to\infty} x_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$.

(B) 我們称函数 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 无穷大,若对任給正数 A 能找到足够大的 N 使在 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 > N$ 时有 $V(x_1 \cdots x_n) > A$.

(C) 本文用到的一个定理作为引理写出;

引理[1]: 对組(1)若存在无穷大定正函数 $V(x_1, x_2, \cdots, x_n)$沿組 (1) 微商 $\frac{dV}{dt}$ 为定負,則組(1)的平凡解大范围漸近稳定.

§2. 我們考虑二阶組

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_1(x) + \varphi_1(y), \\ \frac{dy}{dt} &= f_2(x) + \varphi_2(y), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

这里 $f_i(0) = 0$, $\varphi_i(0) = 0$, $f_i(x)$, $\varphi_i(y)$ 分别在 $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$ 上連續 $(i = 1, 2)$. 組 (2) 的平凡解全局稳定問題文献很少,本文利用上述引理,得出一些使組(2)的平凡解全局漸近稳定的充分条件.

定理 1. 若(2)中

$$\int_0^y \varphi_1(y)dy > 0 \quad y \neq 0, \quad 又 |y| \to \infty \text{ 时积分} \to \infty;$$

$$\int_0^x f_2(x)dx < 0 \quad x \neq 0, \quad 又 |x| \to \infty \text{ 时积分} \to -\infty;$$

又
$$\varphi_1(y)\, \varphi_2(y) - f_1(x)\, f_2(x) < 0, \text{ 当 } x^2 + y^2 \neq 0.$$

則(2)之平凡解全局漸近稳定.

[証] 作

* 1959 年 5 月 4 日收到.

$$V(x, y) = \int_0^y \varphi_1(y)\,dy - \int_0^x f_2(x)\,dx,$$

由条件知 $V(x, y)$ 是无穷大定正函数.

沿(2)

$$\frac{dV}{dt} = \varphi_1(y)\,\varphi_2(y) - f_1(x)\,f_2(x) < 0,$$

即定負,則引理条件满足,定理証毕.

推論 1. 若(2)中

$$\int_0^y \varphi_1(y)\,dy < 0 \quad y \neq 0, \quad \text{又} |y| \to \infty \text{ 时积分} \to -\infty;$$

$$\int_0^x f_2(x)\,dx > 0 \quad x \neq 0, \quad \text{又} |x| \to \infty \text{ 时积分} \to \infty;$$

又 $$f_1(x)\,f_2(x) - \varphi_1(y)\,\varphi_2(y) < 0, \text{当 } x^2 + y^2 \neq 0.$$

則(2)之平凡解全局漸近稳定.

推論 2. 若(2)中

$$\int_0^y \varphi_1(y)\,dy > 0 \quad y \neq 0, \quad \text{又} |y| \to \infty \text{ 积分} \to \infty;$$

$$\int_0^x f_2(x)\,dx > 0 \quad x \neq 0, \quad \text{又} |x| \to \infty \text{ 积分} \to \infty;$$

又 $$f_2(x)\,f_1(x) + \varphi_1(y)\,\varphi_2(y) + 2\varphi_1(y)\,f_2(x) < 0,\ x^2 + y^2 \neq 0.$$

則(2)之平凡解全局漸近稳定.

推論 3. 若(2)中

$$\int_0^y \varphi_1(y)\,dy < 0 \quad y \neq 0, \quad \text{又} |y| \to \infty \text{ 时积分} \to -\infty;$$

$$\int_0^x f_2(x)\,dx < 0 \quad x \neq 0, \quad \text{又} |x| \to \infty \text{ 时积分} \to -\infty;$$

又 $$f_1(x)\,f_2(x) + \varphi_1(y)\,\varphi_2(y) + 2\varphi_1(y)\,f_2(x) > 0.$$

則(2)之平凡解全局漸近稳定.

对以后的定理也有类似的推論以后不再一一写出.

定理 2. (2) 中

$$\int_0^y \varphi_2(y)\,dy > 0 \quad y \neq 0, \quad |y| \to \infty \text{ 时积分} \to \infty;$$

$$\int_0^x f_1(x)\,dx < 0 \quad x \neq 0, \quad |x| \to \infty \text{ 时积分} \to -\infty;$$

又 $$[\varphi_2(y)]^2 - [f_1(x)]^2 + \varphi_2(y)\,f_2(x) - f_1(x)\,\varphi_1(y) < 0 \quad x^2 + y^2 \neq 0.$$

則(2)之平凡解全局漸近稳定.

[証] 作

$$V(x, y) = \int_0^y \varphi_2(y)\,dy - \int_0^x f_1(x)\,dx,$$

其余同上.

定理 3. (2) 中

$$\int_0^x f_1(x)\,dx > 0 \quad x \neq 0, \quad |x| \to \infty \text{ 积分} \to \infty;$$

$$\int_0^y \varphi_1(y)dy < 0 \quad y \neq 0, \quad |y| \to \infty \text{ 积分} \to -\infty;$$

又 $$[f_1(x)]^2 + f_1(x)\,\varphi_1(y) - f_2(x)\,\varphi_1(y) - \varphi_1(y)\,\varphi_2(y) < 0 \quad x^2 + y^2 \neq 0.$$

则(2)之平凡解全局漸近稳定.

定理 4. (2)中

$$\int_0^x f_2(x)\,dx > 0 \quad x \neq 0, \quad |x| \to \infty \text{ 积分} \to \infty;$$

$$\int_0^y \varphi_2(y)\,dy < 0 \quad y \neq 0, \quad |y| \to \infty \text{ 积分} \to -\infty;$$

又 $$f_1(x)\,f_2(x) + f_2(x)\,\varphi_1(y) - f_2(x)\,\varphi_2(y) - [\varphi_2(y)]^2 < 0.$$

则(2)之平凡解全局漸近稳定.

[証] 分别作

$$V(x, y) = \int_0^x f_1(x)\,dx - \int_0^y \varphi_1(y)\,dy,$$

$$V(x, y) = \int_0^x f_2(x)\,dx - \int_0^y \varphi_2(y)\,dy.$$

同前一样証明.

参 考 文 献

[1] Барбашин, Е. А. и Н. Н. Красовский, *Д. А. Н. СССР*, т. 86, в. 3, 1952.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ЛЮБЫХ НАЧАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Чжан Пан-гинь

(*Шаньдунский Океанографический институт*)

Реферат

Дана система двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varphi_1(y) + f_1(x), \qquad \frac{dy}{dt} = \varphi_2(y) + f_2(x), \tag{1}$$

где $f_i(x)$, $\varphi_i(y)$ — непрерывные и дифференцируеные, удовлетворяющие условиям $f_i(0) = \varphi_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2)$.

Теорема I. (1) подчинена условиям

i) $\int_0^y \varphi_1(y)\,dy > 0 \quad y \neq 0$, ещё когда $|y| \to \infty$, $\int_0^y \varphi_1(y)\,dy \to \infty$;

ii) $\int_0^x f_2(x)\,dx < 0 \quad x \neq 0$, ещё когда $|x| \to \infty$, $\int_0^x f_2(x)dx \to -\infty$;

iii) $\varphi_1(y)\,\varphi_2(y) - f_1(x)\,f_2(x) < 0$, когда $x^2 + y^2 \neq 0$.

То, там (1), где асимптотическая чстойчивость в целом тривиального решения $x = 0$, $y = 0$.

Теорема II. (1) подчинена условиям

i) $\int_0^x f_2(x)\,dx > 0 \quad x \neq 0$, ещё когда $|x| \to \infty$, $\int_0^x f_2(x)\,dx \to \infty$;

ii) $\int_0^y \varphi_1(y)\,dy < 0 \quad y \neq 0$, ещё когда $|y| \to \infty$, $\int_0^y \varphi_1(y)dy \to -\infty$;

iii) $f_1(x)\,f_2(x) - \varphi_1(y)\,\varphi_2(y) < 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$.

То, там (1), где асимптотическая устойчивость в целом тривиального решения $x = 0$, $y = 0$.

Теорема III. (1) подчинена условиям

i) $\int_0^y \varphi_2(y)\,dy > 0 \quad y \neq 0$, ещё когда $|y| \to \infty$, $\int_0^y \varphi_2(y)\,dy \to \infty$;

ii) $\int_0^x f_1(x)\,dx < 0 \quad x \neq 0$, ещё когда $|x| \to \infty$, $\int_0^x f_1(x)\,dx \to -\infty$;

iii) $\varphi_2(y)\,(\varphi_2(y) + f_2(x)) - f_1(x)(\varphi_1(y) + f_1(x)) < 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$.

То, там (1), где асимптотическая устойчивость в целом тривиального решения $x = 0$, $y = 0$.

Теорема IV. (1) подчинена условиям

i) $\int_0^x f_1(x)\,dx > 0 \quad x \neq 0$, ещё когда $|x| \to \infty$, $\int_0^x f_1(x)\,dx \to \infty$;

ii) $\int_0^y \varphi_1(y)\,dy < 0 \quad y \neq 0$, ещё когда $|y| \to \infty$, $\int_0^y \varphi_1(y)dy \to -\infty$;

iii) $f_1(x)(\varphi_1(y) + f_1(x)) - \varphi_1(y)(\varphi_2(y) + f_2(x)) < 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$.

То, там (1), где асимптотическая устойчивость в целом тривиального решения $x = 0$, $y = 0$.

Теорема V. (1) подчинена условиям

i) $\int_0^x f_2(x)\,dx > 0 \quad x \neq 0$, ещё когда $|x| \to \infty$, $\int_0^x f_2(x)\,dx \to \infty$;

ii) $\int_0^y \varphi_2(y)\,dy < 0 \quad y \neq 0$, ещё когда $|y| \to \infty$, $\int_0^y \varphi_2(y)\,dy \to -\infty$;

iii) $f_2(x)(f_1(x) + \varphi_1(y)) - \varphi_2(y)(f_2(x) + \varphi_2(y)) < 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$.

То, там (1), где асимптотическая устойчивость в целом тривиального решения $x = 0$, $y = 0$.

Из теоремы Ⅲ, Ⅳ, Ⅴ получается ещё три тех же теорим. Но здесь будет не написано.

第9卷 第4期 数学学报 Vol. 9, No. 4
1959年12月 ACTA MATHEMATICA SINICA Dec., 1959

关于高維射影空間共軛網論的研究(I)*

苏 步 青
(复旦大学及中国科学院上海数学研究所)

1. 引 言

近年来,嘉当的外形式法被应用到几何学的各分支里,起着相当大的作用. 特别地要提起,苏联几何学家菲尼可夫[1,2] 运用这个有效的方法,在普通空間綫汇論中作出了系統的研究. 对高維射影空間綫汇論的应用仅仅是开始的阶段. 捷赫[3] 討論了普通和高維射影空間綫汇的可展变换和射影变形之后,希伟茨[4] 进一步发展后面的問題并做出总結[5].

本文的目的在于运用外形式法来研究 n 維射影空間 S_n 的共軛网論. 熊全治[6]曾經作出这方面的一般理論,而且在他所証明的几个定理中有这样一个:設 N_x 是 S_n 的共軛网而且 π 是任何固定超平面,那末 π 与 N_x 在其任一点 x 的二切綫的交点 M 和 $\bar{M}$ 在 π 上各画共軛网 N_M 和 $N_{\bar{M}}$ 并互为拉普拉斯变换. 柏尔[7] 拓广了这定理并給出了它的簡单証明. 从这看来,熊全治所采用的方法确实有一些缺点. 可是另一方面,利用柏尔或著者[8] 的方法企图簡洁地导出熊全治的第二結果,并不是容易的事情. 这表明了进一步改善討論方法有它的必要.

在本文里,著者选取活动标形使射影共变地联系一个共軛网,并运用外微分形式論来处理共軛网的基本方程組和它的可积分条件. 从此很迅速地証明,一个具有熊全治、柏尔型的普遍定理和存在定理. 这样,我們不仅大大地扩充了柏尔的結果,而且还把熊全治的第二結果作为一个特殊情况包括进来. 此外,我們还把一个綫汇与一个共軛网的共軛概念和調和概念扩充到高維空間里.

2. 共軛網的附屬方程

假設在 n 維射影空間 S_n 里($n \geqslant 3$)点 A_1 画成一个共軛网 (u, v), 它的沿 u 方向的拉普拉斯变换是 $A_2, A_4, \cdots, A_{2h}, \cdots$ 而且沿 v 方向的是 $A_3, A_5, \cdots, A_{2h+1}, \cdots$. 如果这个拉普拉斯叙列不中断、不退縮而且具有一般位置,那末我們可以选取其中一部分,例如 $A_7, A_5, A_3, A_1, A_2, A_4, A_6$ 作为活动标形的頂点而其他頂点(仍記作 A_i)的选择只須满足 $A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}$ 是綫性无关的条件就够了,且从而获得

$$\begin{aligned}
dA_1 &= \omega_{11} A_1 + a_1 \omega_2 A_2 + \omega_1 A_3,\\
dA_2 &= b_1 \omega_1 A_1 + \omega_{22} A_2 + \omega_2 A_4,\\
dA_3 &= b_2 \omega_2 A_1 + \omega_{33} A_3 + a_3 \omega_1 A_5,\\
dA_4 &= a_4 \omega_1 A_2 + \omega_{44} A_4 + b_3 \omega_2 A_6,\\
dA_5 &= b_4 \omega_2 A_3 + \omega_{55} A_5 + a_4 \omega_1 A_7,
\end{aligned} \tag{1}$$

---

* 1959年10月7日收到.

$$dA_k = \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{kj} A_j \qquad (k = 6, \cdots, n+1),$$

式中已置

$$\omega_{13} = \omega_1, \quad \omega_{24} = \omega_2. \tag{2}$$

很明显，

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0 \tag{3}$$

表示共軛网 A_1 的二系网曲綫 u 和 v，所以不妨假定

$$\omega_1 = dv, \quad \omega_2 = du. \tag{4}$$

所論的共軛网决定于下列方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_{14} = 0, \quad \omega_{15} = 0, \quad \omega_{16} = 0, \quad \omega_{17} = 0,\\
&\omega_{23} = 0, \quad \omega_{25} = 0, \quad \omega_{26} = 0, \quad \omega_{27} = 0,\\
&\omega_{32} = 0, \quad \omega_{34} = 0, \quad \omega_{37} = 0,\\
&\omega_{41} = 0, \quad \omega_{43} = 0, \quad \omega_{47} = 0,\\
&\omega_{51} = 0, \quad \omega_{52} = 0, \quad \omega_{56} = 0,\\
&\omega_{1i} = 0, \quad \omega_{2i} = 0, \quad \omega_{3i} = 0, \quad \omega_{4i} = 0, \quad \omega_{5i} = 0\\
&\qquad\qquad (i = 8, \cdots, n+1)
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

和

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_{12} = a_1\omega_2, \quad \omega_{21} = b_1\omega_1, \quad \omega_{31} = b_2\omega_2,\\
&\omega_{35} = a_3\omega_1, \quad \omega_{42} = a_4\omega_1, \quad \omega_{46} = b_3\omega_2,\\
&\omega_{53} = b_4\omega_2, \quad \omega_{57} = a_4\omega_1.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

另外，这些法甫形式 ω_{ij} 必須滿足組織方程

$$[d\omega_{ij}] = \sum_{k=1}^{n+1} [\omega_{ik}\omega_{kj}]. \tag{7}$$

从(2)，(4)和(7)容易导出

$$[\omega_{11} - \omega_{33}, \omega_1] = 0, \quad [\omega_{22} - \omega_{44}, \omega_2] = 0. \tag{8}$$

同样，把(5)和(6)的一些关系代进(7)，又可得出一系列方程，例如

$$\left.\begin{aligned}
&[da_1 + a_1(2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44}), \omega_2] = 0,\\
&[db_2 + b_2(\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33} - \omega_{44}), \omega_2] = 0,\\
&[d(\omega_{33} - \omega_{11})] = (a_1b_1 + a_3b_4 - 2b_2)[\omega_1\omega_2],\\
&[d(\omega_{22} - \omega_{11})] = (2a_1b_1 - b_2 - a_1)[\omega_1\omega_2].
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

3. 柏尔的定理和第一拓广

现在假定 $n \geqslant 4$ 并在网(A_1)的二切綫 A_1A_3 和 A_1A_2 各取一点 X 和 Y；那末我們有

$$\left.\begin{aligned}
X &= \mu A_1 - A_3,\\
Y &= \nu A_1 - A_2,
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

其中 μ 和 ν 都是 u 和 v 的函数。

如果曲面(X)在点 X 的切平面通过点 Y 而且曲面(Y)在 Y 的切平面通过 X，那末一定存在方向 d_1 和 d_2，以及一些法甫形式 $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ 和 $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$，使下列方程成立：

$$\left.\begin{aligned} d_1 X &= \widetilde{\omega}_1 X + \widetilde{\omega}_2 Y, \\ d_2 X &= \overline{\omega}_1 X + \overline{\omega}_2 Y. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

从附属方程(1)改写$(11)_1$的左边而且用ω'_{ij}表示ω_{ij}对应于方向d_1的法甫形式;演算的結果如下:

$$\begin{aligned} d_1 \mu + \mu\omega'_{11} - b_2 \omega_2 &= \widetilde{\omega}_1 \mu + \widetilde{\omega}_2 \nu, \\ a_1 \mu\omega_2 &= -\widetilde{\omega}_2, \\ \mu\omega_1 - \omega'_{33} &= -\widetilde{\omega}_1, \\ a_3 \omega_1 &= 0. \end{aligned}$$

假使$a_3 = 0$, 那末从$(1)_3$看出, (A_3)将退縮成为一条曲綫而和原假定不符. 所以最后方程化为$\omega_1 = 0$, 就是説, d_1必須是方向u, 且从而

$$\widetilde{\omega}_1 = \omega'_{33}, \quad \widetilde{\omega}_2 = -a_1 \mu\omega_2;$$

$$d_1 \mu = \mu(\omega'_{33} - \omega'_{11}) + (b_2 - a_1 \mu\nu)\omega_2. \tag{12}$$

同样,从$(11)_2$导出: d_2必須是方向v ($\omega_2 = 0$), 二法甫形式$\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2$是

$$\overline{\omega}_1 = -\nu\omega_1, \quad \overline{\omega}_2 = \omega''_{22},$$

式中ω''_{ij}表示ω_{ij}对应于方向v的法甫形式. 另外,

$$d_2\nu = \nu(\omega''_{22} - \omega''_{11}) + (b_1 - \mu\nu)\omega_1. \tag{13}$$

这样一来,証明了柏尔的定理:

如果共軛网(A_1)的二切綫$A_1 A_3$和$A_1 A_2$上各有这样的点X和Y, 曲面(X)在X的切平面通过Y而且曲面(Y)在Y的切平面通过X, 那末X和Y各画成共軛网并互为拉普拉斯变换.

其次,我們要进一步扩充这定理. 为此,考察二共軛网(A_1)和(A_2)并在各网的切平面上取点X和Y:

$$\left.\begin{aligned} X &= \mu A_1 + \nu A_3 - A_2, \\ Y &= \sigma A_1 + \tau A_2 - A_4, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

式中μ, ν, σ, τ都是u, v的函数. 同前述一样地,假定曲面(X)在点X的切平面通过点Y而且曲面(Y)在Y的切平面通过X, 那末必有方向d_1, d_2和一些法甫形式$\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2$; $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2$使得(11)成立,即

$$\left.\begin{aligned} d_1X &= \widetilde{\omega}_1 X + \widetilde{\omega}_2 Y, \\ d_2Y &= \overline{\omega}_1 X + \overline{\omega}_2 Y. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

把(14)代到(15)的两边,按照附属方程(1)演算它的左边并比較两边的系数; 由于$a_3 b_3 \nu\tau \neq 0$(否則,所論的拉普拉斯叙列要退縮,或者所研究的情况归結到柏尔的定理),方向d_1和d_2必須是u和v, 而且

$$\widetilde{\omega}_1 = (\tau - a_1 \mu)\omega_2 + \omega'_{22}, \quad \widetilde{\omega}_2 = \omega_2,$$

$$\overline{\omega}_2 = \omega''_{44}, \quad \overline{\omega}_2 = \frac{\sigma}{\nu}\omega_1.$$

同时,我們有

$$\left.\begin{aligned} d_1 \mu &= \mu(\omega'_{22} - \omega'_{11}) + \{\sigma - b_2\nu + \mu(\tau - a_1 \mu)\}\omega_2, \\ d_1 \nu &= \nu(\omega'_{22} - \omega'_{33}) + \nu(\tau - a_1 \mu)\omega_2; \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} d_2\sigma &= \sigma(\omega''_{44} - \omega''_{11}) + \left(\frac{\sigma\mu}{v} - b_1\tau\right)\omega_1, \\ d_2\tau &= \tau(\omega''_{44} - \omega''_{22}) + \left(a_4 - \frac{\sigma}{v}\right)\omega_1, \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

式中 ω'_{ij} 和 ω''_{ij} 的意义如前所述.

这样一来,我們获得了柏尔定理的第一拓广:

如果在共軛网(A_1)和其相邻拉普拉斯变换网(A_2)的切平面上各有这样的点 X 和 Y,曲面(X) 在X的切平面通过Y而且曲面 (Y) 在Y的切平面通过 X, 那末X和Y各画成共軛网并互为拉普拉斯变换.

这拓广定理包括熊全治的第二定理作为一个特殊情况. 事实上, 設 S_{n-2} 是固定的 $n-2$ 維空間并且X和Y順次是这 S_{n-2} 与二切平面 $[A_3A_1A_2]$ 和 $[A_1A_2A_4]$ 的交点. 由于 u 曲綫是(A_1)的网曲綫,沿它移动切平面 $[A_3A_1A_2]$ 的时候,这切平面和其邻近平面决定三維空間 $S_3[A_3A_1A_2A_4]$, 所以点X的移动方向是沿着这 S_3 与 S_{n-2} 的交綫(XY)的, 从而曲面(X)在X的切平面通过 Y. 同样, 曲面(Y)在Y的切平面通过 X. 因此,我們断定点X画成共軛网,卽熊全治的第二定理. 如上所述,不仅証明了这个特殊情况而且还补充了它的內容.

4. 一 般 定 理

我們轉到更普遍的情况. 設 $n \geqslant 2k > 4$, 我們还可継續特殊化参考的活动标形, 就是选取(A_1)的沿 u 方向的逐次拉普拉斯变换网作为标形的頂点 $A_2, A_4, \cdots, A_{2k+2}$, 从而附属方程(1)的一部分采取下列形式:

$$dA_{2h} = c_{2h-2}\,\omega_1 A_{2h-2} + \omega_{2h,2h}A_{2h} + b_{2h+2}\,\omega_2\,A_{2h+2} \quad (18)$$
$$(h = 3, \cdots, k+1).$$

考察两个 $k+1$ 維空間 S'_{k+1}: $[A_3A_1A_2A_4\cdots A_{2k}]$ 和 S''_{k+1}: $[A_1A_2A_4A_6\cdots A_{2k+2}]$; 很明显,网$(A_3)$的 u 曲綫在 A_3 的 $k+1$ 維密切空間是 S'_{k+1}, 而且网(A_1)的 u 曲綫在 A_1 的 $k+1$ 維密切空間是 S''_{k+1}[9]. 在 S'_{k+1} 和 S''_{k+1} 內順次选取这样的点X和 Y, 曲面(X)在X的切平面通过Y并且曲面(Y)在Y的切平面通过 X. 那末我們有

$$\left.\begin{aligned} X &= \mu A_1 + vA_3 + \mu_1A_2 + \mu_2A_4 + \cdots + \mu_{k-1}A_{2k-2} - A_{2k}, \\ Y &= \sigma A_1 + v_1A_2 + v_2A_4 + \cdots + v_kA_{2k} - A_{2k+2}, \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

并且有两个方向 d_1 和 d_2, 以及法甫形式 $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}_2$ 和 $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$, 使得

$$\left.\begin{aligned} d_1X &= \tilde{\omega}_1X + \tilde{\omega}_2Y, \\ d_2Y &= \bar{\omega}_1X + \bar{\omega}_2Y. \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

同前节所述完全一样,从(1), (18)—(20)容易导出: d_1 和 d_2 必須是 u 方向 $(\omega_1 = 0)$ 和 v 方向$(\omega_2 = 0)$,

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= (b_{2k+2}v_k - b_{2k}\mu_{k-1})\omega_2 + \omega'_{2k,2k}, \\ \tilde{\omega}_2 &= b_{2k+2}\,\omega_2; \\ \bar{\omega}_1 &= \frac{\sigma}{v}\,\omega_1, \quad \bar{\omega}_2 = \omega''_{2k+2,2k+2} \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

而且

$$\left.\begin{aligned}
d_1\mu &= \mu(\omega'_{2k,2k}-\omega'_{11})+\{\sigma-b_2\nu+\mu(b_{2k+2}\nu_k-b_{2k}\mu_{k-1})\}\omega_2,\\
d_1\nu &= \nu\{\omega'_{2k,2k}-\omega'_{33}+(b_{2k+2}\nu_k-b_{2k}\mu_{k-1})\omega_2\},\\
d_1\mu_1 &= \mu_1(\omega'_{2k,2k}-\omega'_{22})+\{\nu_1 b_{2k+2}-a_1\mu+\mu_1(b_{2k+2}\nu_k-b_{2k}\mu_{k-1})\}\omega_2,\\
d_1\mu_2 &= \mu_2(\omega'_{2k,2k}-\omega'_{44})+\{\nu_2 b_{2k+2}-\mu_1+\mu_2(b_{2k+2}\nu_k-b_{2k}\mu_{k-1})\}\omega_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
d_1\mu_{k-1} &= \mu_{k-1}(\omega'_{2k,2k}-\omega'_{2k-2,2k-2})+\{\nu_{k-1}b_{2k+2}-\mu_{k-2}b_{2k-2}+\\
&\qquad +\mu_{k-1}(b_{2k+2}\nu_k-b_{2k}\mu_{k-1})\}\omega_2;
\end{aligned}\right\}\quad(22)$$

$$\left.\begin{aligned}
d_2\sigma &= \sigma(\omega''_{2k+2,2k+2}-\omega''_{11})+\left(\frac{\mu\sigma}{\nu}-b'_1\nu_1\right)\omega_1,\\
d_2\nu_1 &= \nu_1(\omega''_{2k+2,2k+2}-\omega''_{22})+\left(\frac{\mu_1\sigma}{\nu}-a_4\nu_2\right)\omega_1,\\
d_2\nu_2 &= \nu_2(\omega''_{2k+2,2k+2}-\omega''_{44})+\left(\frac{\mu_2\sigma}{\nu}-c_4\nu_3\right)\omega_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
d_2\nu_{k-1} &= \nu_{k-1}(\omega''_{2k+2,2k+2}-\omega''_{2k-2,2k-2})+\left(\frac{\mu_{k-1}\sigma}{\nu}-\nu_k c_{2k-2}\right)\omega_1,\\
d_2\nu_k &= \nu_k(\omega''_{2k+2,2k+2}-\omega''_{2k,2k})+\left(c_{2k}-\frac{\sigma}{\nu}\right)\omega_1,
\end{aligned}\right\}\quad(23)$$

式中 ω'_{ij} 和 ω''_{ij} 的意义如前所述.

这样,我們获得了一般定理:

如果在共軛网(A_3)和它沿 u 方向(或 v 方向)的拉普拉斯变换网(A_1)(或(A_5))的对应点引 u 曲綫(或 v 曲綫)的 k 維密切空間 S'_k 和 S''_k 并在它們的里面各取这样的点 X 和 Y, 曲面(X)在 X 的切平面通过 Y 而且曲面(Y)在 Y 的切平面通过 X, 那末 X 和 Y 各画成共軛网并互为拉普拉斯变换.

特别当点 X 和 Y 是 S_k 和 S'_k 与一个固定空間 S_{n-k} 的交点时,我們得到下列推論:

如果一个共軛网沿其一曲綫的 k 維密切空間 S_k 与一个固定的 $n-k$ 維空間 S_{n-k} 相交于一点 X,那末 X 画成一个共軛网,并且这样沿某一方向的 h 个連續拉普拉斯变换网所作出的 h 个新共軛网在 S_{n-k} 中构成一个拉普拉斯叙列的 h 个連續拉普拉斯变换网.

5. 存 在 定 理

在前两节里所討論的問題都是在那些点 X 和 Y 存在的假設下进行分析的. 剩下来的自然是存在定理的建立問題.

首先考察柏尔的定理,要証明由(10)决定的 X 和 Y 的存在,只須討論二函数 μ 和 ν 的微分方程(12)和(13). 由于我們可以改写这些方程为法甫系統

$$\left.\begin{aligned}
d\mu &= \mu(\omega_{33}-\omega_{11})+(b_2-a_1\mu\nu)\omega_2+p\omega_1,\\
d\nu &= \nu(\omega_{22}-\omega_{11})+(b_1-\mu\nu)\omega_1+q\omega_2,
\end{aligned}\right\}\quad(24)$$

其中 p 和 q 是新导入的 u, v 的輔助函数, 作出这系統的协变方程并按(9)改写它們,便获得

$$\left.\begin{aligned}
&[dp+\{a_1\nu p-\mu(a_3 b_4-2b_2+a_1\mu\nu)\}\omega_2,\ \omega_1]=0,\\
&[dq+\nu(2a_1 b_1+a_1\mu\nu-b_2-a_4)\omega_1+q(\omega_{11}-\omega_{22}+\mu\omega_1),\ \omega_2]=0.
\end{aligned}\right\}\quad(25)$$

从此看出，(25) 的行列式等于 $\omega_1\omega_2 \neq 0$，所以柏尔定理中的共軛网 (X) 和 (Y) 是与一个变数的两个任意函数有关的．这結果符合于我們以前所証明的定理，就是 (X) 和 (Y) 是 (A_1) 的列伟变换．

其次，轉到柏尔定理的第一拓广上去；这时，四个未知函数 μ, ν, σ, τ 满足条件 (16) 和(17)．这就是說，它們满足下列法甫系統：

$$\left.\begin{aligned} d\mu &= \mu(\omega_{22}-\omega_{11}) + \{\sigma - b_2\nu + \mu(\tau - a_1\mu)\}\omega_2 + p\omega_1, \\ d\nu &= \nu(\omega_{22}-\omega_{33}) + \nu(\tau - a_1\mu)\omega_2 + q\omega_1, \\ d\sigma &= \sigma(\omega_{44}-\omega_{11}) + \left(\frac{\sigma\mu}{\nu} - b_1\tau\right)\omega_1 + x\omega_2, \\ d\tau &= \tau(\omega_{44}-\omega_{22}) + \left(a_4 - \frac{\sigma}{\nu}\right)\omega_1 + y\omega_2, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

式中 p, q, x 和 y 是四个輔助函数．

外导微(26)的两边并利用这些方程本身，便容易导出有关的协变系統：

$$\left.\begin{aligned} [dp, \omega_1] + \cdots = 0, \quad [dq, \omega_1] + \cdots = 0, \\ [dx, \omega_2] + \cdots = 0, \quad [dy, \omega_2] + \cdots = 0, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

这里所略去的各項都是已給定了的二阶外微分形式．很明显，(27)的行列式是$(\omega_1\omega_2)^2 \neq 0$，所以在第一拓广中的共軛网 ($X$) 和 ($Y$) 是与一个变数的四个任意函数有关的．

最后，我們运用上述的方法来討論一般定理中的存在問題．这时，只須由(22)和(23)出发，把它們改写为法甫系統(S)，其中需要导入 $2k+2$ 个輔助函数 $p, q, p_1, p_2, \cdots, p_{k-1}$; $x, y, x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}$，从而所对应的协变系統是

$$\left.\begin{aligned} &[dp, \omega_1] + \cdots = 0, \quad [dq, \omega_1] + \cdots = 0, \quad [dp_1, \omega_1] + \cdots = 0, \cdots, \\ &\qquad\qquad [dp_{k-1}, \omega_1] + \cdots = 0; \\ &[dx, \omega_2] + \cdots = 0, \quad [dy, \omega_2] + \cdots = 0, \quad [dx_1, \omega_2] + \cdots = 0, \cdots, \\ &\qquad\qquad [dx_{k-1}, \omega_2] + \cdots = 0, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

式中所省略的各項都是已給定了的二阶外微分形式．容易看出，(28)的行列式是

$$(\omega_1\omega_2)^{k+1} \neq 0,$$

且从而証明了存在定理：

一般定理中的共軛网 (X) 和 (Y) 是与一个变数的 $2(k+1)$ 个任意函数有关的．

6. 共軛網与直綫匯的广义共軛和广义調和

設直綫汇 $\Gamma_{A_1A_2}$ 的光綫上的一点 X 画成共軛网(u, v)，其中 $u(\omega_1 = 0)$和 $v(\omega_2 = 0)$是 $\Gamma_{A_1A_2}$ 的焦网参数，那末这网 $X(u, v)$ 与綫汇 $\Gamma_{A_1A_2}$ 在普通意义之下是共軛的．如所知[10]，$X(u, v)$所属的拉普拉斯叙列$\cdots, X_1, X, Y, Y_1, \cdots$一定内接于叙列$\cdots A_3, A_1, A_2, A_4 \cdots$．这时，綫汇 Γ_{X_1X} 与共軛网 (A_1) 在普通意义之下是調和的．从共軛性质导出調和性质这个事实可从下述的演算予以証明．

实际上，如前(10)和(11)中所述，这时我們有

$$X = \mu A_1 - A_3, \tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned} d_1 X &= \tilde{\omega}_1 X + \tilde{\omega}_2 Y, \\ d_2 Y &= \bar{\omega}_1 X + \bar{\omega}_2 Y, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

式中 d_1 和 d_2 分别表示方向 $\omega_1 = 0$ 和 $\omega_2 = 0$.

从(1)和$(30)_1$得到

$$\tilde{\omega}_2 Y = (\cdot)A_1 + (\cdot)A_2 + (\tilde{\omega}_1 - \omega'_{33})A_3, \tag{31}$$

这里和以后,我們把不必要的系数(法甫形式)記作(·).

运用 d_2 到(31)的两边并利用(31)和(1),容易导出

$$\tilde{\omega}_2(\bar{\omega}_1 X + \bar{\omega}_2 Y) = (\cdot)A_1 + (\cdot)A_2 + (\cdot)A_3 + a_3\omega_1(\tilde{\omega}_1 - \omega'_{33})A_5. \tag{32}$$

可是(32)的左边至多只能是 A_1, A_2, A_3 的綫性組合,而且 $a_3\omega_1 \neq 0$,所以 $\tilde{\omega}_1 - \omega'_{33} = 0$,从而改写(31),

$$Y = \nu A_1 - A_2. \tag{33}$$

这表示点 Y 在光綫 A_1A_2 上,也就是說:直綫汇 Γ_{XY} 与共軛网(A_1)是調和的.

以上的方法直接可以拓广. 为闡明这可能性,考察共軛网(A_1)在点 A_1 的切平面 $[A_3A_1A_2]$ 和其上一点 X,并假定这点画成共軛网(u, v).那末,一定有一点 Y 使得

$$X = \mu A_1 + \nu A_3 - A_2, \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned} d_1X &= \tilde{\omega}_1 X + \tilde{\omega}_2 Y,\\ d_2Y &= \bar{\omega}_1 X + \bar{\omega}_2 Y,\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

式中 d_1 和 d_2 的意义如前.

从此导出

$$\tilde{\omega}_2 Y = (\cdot)A_1 + (\cdot)A_2 + (\cdot)A_4 + (d_1\nu + \nu\omega'_{33} - \nu\tilde{\omega}_1)A_3, \tag{36}$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\omega}_2(\bar{\omega}_1 X + \bar{\omega}_2 Y) = (\cdot)A_1 + (\cdot)A_2 + (\cdot)A_3 + (\cdot)A_4 +\\ + (d_1\nu + \nu\omega'_{33} - \nu\tilde{\omega}_1)a_3\omega_1 A_5.\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

按照上述的同一理由,

$$d_1\nu + \nu\omega'_{33} - \nu\tilde{\omega}_1 = 0.$$

所以我們有

$$Y = \sigma A_1 + \tau A_2 - A_4. \tag{38}$$

这就是說,X 的拉普拉斯变换 Y 在平面 $[A_1A_2A_4]$ 之上. 这平面即是共軛网(A_1)的网曲綫 $u(\omega_1 = 0)$ 在 A_1 的密切平面.

一般地,在共軛网(A_1)的网曲綫 $u(\omega_1 = 0)$ 或 $v(\omega_2 = 0)$ 的 k 維密切空間 S'_k 或 S''_k 里如有一点 X 画成共軛网(u, v),我們定义它与直綫汇 $\Gamma_{A_1A_2}$ 或 $\Gamma_{A_1A_3}$ 构成**第 k 阶共軛**,这里 $k \geqslant 1$. 按定义,普通共軛是第1阶;而且刚才所討論的情况恰恰相当于第2阶共軛. 我們容易扩充关于第2阶共軛的結果到第 k 阶共軛,只須从$(19)_1$和(20)出发,如前进行演算,便可証明下列定理:

如果一个共軛网 $X(u, v)$ 与一个直綫汇 $\Gamma_{A_1A_2}$ 是第 k 阶共軛的,那末它們沿同一方向的拉普拉斯变换也是第 k 阶共軛的,其中 $k \geqslant 1$.

在第2阶共軛的时候,已經看到直綫汇 Γ_{XY} 的二焦网的点各在网(A_3)和(A_1)在 A_3 和 A_1 的密切平面上. 这事实引起我們来定义直綫汇 Γ_{XY} 与共軛网(A_1)的**第2阶調和**. 并且更一般地定义它們的**第 k 阶調和**. 上述定理表示了,从共軛网与直綫汇的第 k 阶共軛概念可以导出它們的第 k 阶調和性.

关于这方面的詳細研究,将在另文发表.

参 考 文 献

[1] Фиников, С. П., Теория конгруэнций. ГИТТЛ (1950).
[2] Фиников, С. П., Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ (1956).
[3] Eduard Čech, Transformations developpables des congruences des droites, *Czech. Math. Journ.*, **6** (1956), 260—286.
[4] Alois Švec, Deformation projective des congruences des droites. *Czech. Math. Journ.*, **5** (1955), 546—558.
[5] Alois Švec, Sulla teoria delle congruenze di rette. *Boll. Un. Mat. Ital.*, (3) 12 (1957), 446—457.
[6] 熊全治：A general theory of conjugate nets in projective hyperspace. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1951), 312—322.
[7] Bell, P. O., A theorem on conjugate nets in projective hyperspace. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952), 300—302.
[8] 苏步青：曲面的漸近綫网与調和綫汇，数学学报，**3** (1953)，167—176.
[9] Lane, E. P., A treatise on projective differential geometry. (1942), 223 頁.
[10] 苏步青：关于高維空間共軛网論的一个註記，科学記录(新輯)，**3** (1959)，359—362.

CONTRIBUTIONS TO THE THEORY OF CONJUGATE NETS IN PROJECTIVE HYPERSPACE (I)

Su Buchin
(Fuh-tan University and Academia Sinica)

Abstract

The object of the present paper is to develop the theory of conjugate nets in an n-dimensional projective space S_n by utilizing Cartan's method of exterior forms. Hsiung Chun-Chih has demonstrated that the two tangents at a generic point of a conjugate net N_x intersect a fixed hyperplane at two points which describe in turn two conjugate nets and stand for Laplace transforms to each other. A generalized theorem with a simple proof has been obtained by P. O. Bell, but there is no improvement concerning the second theorem of Hsiung: The point of intersection of the tangent plane at a generic point of N_x with any fixed subspace S_{n-2} of $n-2$ dimensions describes a conjugate net in S_{n-2}.

In the present paper we merely consider the general case where the associate Laplace sequence of the conjugate net N_x is neither periodic nor degenerate, so that a moving frame $\{A_1 A_2 \cdots A_{n+1}\}$ can be attached to a generic point A_1 of the net $N_x(A_1)$, such that $\cdots, A_5, A_3, A_1, A_2, A_4, \cdots$ constitute the Laplace sequence. Suppose that $n \geqslant 2k \geqslant 4$, and S'_k and S''_k denote the k-dimensional osculating spaces of the corresponding net curves at A_3 and A_1 respectively. If we take two points X and Y respectively, in S'_k and S''_k in such a way that the tangent plane of the surface (X) $[(Y)]$ at X $[Y]$ passes through Y $[X]$, then X and Y must describe two conjugate nets which are Laplace transforms to each other, and the determination of such points X and Y depends upon $2k$ arbitrary functions of one argument.

The above result not only furnishes a natural generalization of Bell's theorem, but also contains a special case where X and Y are respectively the points of intersection of

S'_k and S''_k with any fixed space S_{n-k} of $n-k$ dimensions. Obviously, even this particular case may be seen as an extension of the second theorem of Hsiung. Moreover, the last part of our theorem also gives a generalization of a former result of the present author, namely, when $k=1$, the determination of Levy transforms of a conjugate net depends upon two arbitrary functions of one argument.

The above consideration leads us to generalize the notion of the conjugate as well as harmonic relation between a conjugate net and a rectilinear congruence. If we take a point X in the osculating space S'_k, for example, of the curve u at the point A_3, such that X describes a conjugate net $X(u, v)$, then the net $X(u, v)$ is said to be conjugate of the k th species to the congruence $\Gamma_{A_3A_1}$. According to this definition the ordinary conjugate relation is of the first species, since the point X lies on the corresponding ray of the congruence. In the last case it is known that the Laplace transform Y of the net X must lie on the corresponding Laplace transform of the congruence, and in consequence, the congruence Γ_{XY} is harmonic to a conjugate net. We can now extend this fact to the case of conjugate relations of the k th species and show, in fact, that the Laplace transform Y of $X(u, v)$ along the direction u must lie in the osculating space S''_k of the curve u at the point A_1. Thus we reach the general notion of the harmonic relation of the k th species between the conjugate net (A_1) and the rectilinear congruence Γ_{XY}.

第9卷 第4期 数 学 学 报 Vol. 9, No. 4
1959 年 12 月 ACTA MATHEMATICA SINICA Dec., 1959

常系数綫性微分方程組的 Ляпунов 函数的公式*

蔡 燧 林
(合肥工业大学)

§1. 引言 我們考虑实常系数綫性微分方程組

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$

Ляпунов[1] 早已証明：如果(1)的特征方程

$$|a_{ij} - \lambda\delta_{ij}| \equiv (-1)^n (\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p_n) = 0 \tag{2}$$

所有的根皆具負实部，那末对于任意給定的負定(正定) m 次齐次多項式 $U(x_1, \cdots, x_n)$，恆存在唯一正定(負定) m 次齐次多項式 $V(x_1, \cdots, x_n)$ 满足方程

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)} \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \frac{\partial V}{\partial x_i} = U. \tag{3}$$

本文在于給定了負定 2 次(即 $m = 2$) 齐次多項式 $U = -A\sum_{j=1}^{n} x_j^2$，$A$ 是正常数，根据(3)具体算出 Ляпунов 函数 V 的明显表达式，表示成一些平方的和，而其系数是 Routh-Hurwitz 行列式

$$\Delta_1 \equiv p_1, \quad \Delta_2 \equiv \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ p_0 & p_2 \end{vmatrix}, \quad \cdots, \quad \Delta_n \equiv \begin{vmatrix} p_1 & p_3 & \cdots & p_{2n-1} \\ p_0 & p_2 & \cdots & p_{2n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{vmatrix} \tag{4}$$

($p_0 \equiv 1$, $p_k = 0$ 当 $k > n$) 的函数.

在本文最后，我們順便指出 Ляпунов 函数的明显表达式在实际問題中的用途，并且具体估計了微分差分方程中稳定情形的时滞界限.

§2. 記号和基本定理 为书写簡单起見，我們引入一些記号. 1° 在 n 阶系数行列式 $|a_{s\sigma}|$ 中，第 j 列的元素換以 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 之后，取它的第 $\nu_1, \cdots, \nu_k$ 行，第 $\nu_1, \cdots, \nu_k$ 列的元素 ($\nu_1 < \cdots < \nu_k$) 作出的 k 阶子行列式以 $M^{(j)}_{\nu_1, \ldots, \nu_k}(x_1, \cdots, x_n)$ 表示之; 2° 記号 $\sum M^{(j)}_{\nu_1, \ldots, \nu_k}(x_1, \cdots, x_n)$ 或有时为方便起見簡写成 $\sum_k$ 表示諸 $M^{(j)}_{\nu_1, \ldots, \nu_k}(x_1, \cdots, x_n)$ 对 $\nu_1, \cdots, \nu_k$ 的和，其中 $\nu_1, \cdots, \nu_k$ 是集 $(1, 2, \cdots, n)$ 中的各种可能組合，但数 j 必須取到; 3° 行列式 Δ_s 的第 s 行中的所有元素 p_{k-1} 易之以 $\sum M^{(j)}_{\nu_1, \ldots, \nu_k}(x_1, \cdots, x_n)$ 所得到的新行列式以 $\Delta_{s,j}(x_1, \cdots, x_n)$ 表示.

基本定理 給定实常系数綫性微分方程組(1)，則函数

* 1959 年 10 月 16 日收到.

$$V = \Delta_2 \cdots \Delta_n \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + \sum_{\sigma=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq \sigma \pm 1}}^{n} \Delta_s \Delta_{\sigma,j}^2 (x_1, \cdots, x_n) \tag{5}$$

$(\Delta_0 \equiv 1)$沿方程組(1)的积分曲綫的微商是

$$\frac{dV}{dt} = -2\Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_n \sum_{j=1}^{n} x_j^2. \tag{6}$$

这个公式当 $n=2$ 时,是 Малкин[2] 首先得到的. 作为例子,我們給出此公式当 $n=3$ 时的形状:

$$\left.\begin{aligned} V = & p_3(p_1 p_2 - p_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + p_1 p_3 \left[\left(\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} \\ x_2 & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & a_{13} \\ x_3 & a_{33} \end{vmatrix}\right)^2 + \right. \\ & + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 \\ a_{21} & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & a_{23} \\ x_3 & a_{33} \end{vmatrix}\right)^2 + \left.\left(\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 \\ a_{31} & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & x_2 \\ a_{32} & x_3 \end{vmatrix}\right)^2\right] + \\ & + \left[\left(p_3 x_1 - p_1 \begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{22} & a_{23} \\ x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right)^2 + \left(p_3 x_2 - p_1 \begin{vmatrix} a_{11} & x_1 & a_{13} \\ a_{21} & x_2 & a_{23} \\ a_{31} & x_3 & a_{33} \end{vmatrix}\right)^2 + \right. \\ & + \left.\left(p_3 x_3 - p_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & x_3 \end{vmatrix}\right)^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\frac{dV}{dt} = -2p_1(p_1 p_2 - p_3) p_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \tag{8}$$

这样的函数(5),不仅在(4)均大于零时是 Ляпунов 函数,而当(4)中沒有一个为零,或者虽然有的 Δ_s 为零,但若此时的 V 仍为正定函数时,也是 Ляпунов 函数.

§3. 引理1 为了証明定理,我們先証下述引理.

引理1 下列諸式(9)—(14)是恆等的(其中微商是沿(1)的积分曲綫求).

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = -\Delta_1 x_j^2 - \sum M_{\nu_1}^{(j)}(x_1, \cdots, x_n) \Delta_{1,j}(x_1, \cdots, x_n), \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt} \sum M_{\nu_1,\dots,\nu_k}^{(j)}(x_1, \cdots, x_n) = (-1)^k p_k x_j - \sum M_{\nu_1,\dots,\nu_{k+1}}^{(j)}(x_1, \cdots, x_n), \tag{10}$$

$$k = 1, 2, \cdots, n-1.$$

$$\frac{d}{dt} \sum M_{\nu_1,\dots,\nu_n}^{(j)}(x_1, \cdots, x_n) = (-1)^n p_n x_j, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt} \Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n) = -\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{2\sigma-3} & p_{2\sigma-1} \\ p_0 & \cdots & p_{2\sigma-4} & p_{2\sigma-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & p_{\sigma-1} & p_{\sigma+1} \\ 0 & \cdots & \Sigma_\sigma & \Sigma_{\sigma+2} \end{vmatrix}, \tag{12}$$

$$\sigma = 2, \cdots, n-2.$$

$$\frac{d}{dt} \Delta_{n-1,j}(x_1, \cdots, x_n) = -\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{2n-5} & p_{2n-3} \\ p_0 & \cdots & p_{2n-6} & p_{2n-4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & p_{n-2} & p_n \\ 0 & \cdots & \Sigma_n & 0 \end{vmatrix} = p_n \Delta_{n-2,j}(x_1, \cdots, x_n). \tag{13}$$

$$\Delta_\sigma \frac{d}{dt} \Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n) + \Delta_{\sigma-1} \Delta_{\sigma+1,j}(x_1, \cdots, x_n) = \Delta_{\sigma+1} \Delta_{\sigma-1,j}(x_1, \cdots, x_n).$$

$$\sigma = 2, \cdots, n-2 \tag{14}$$

$(j = 1, 2, \cdots, n)$.

証. 上述諸恆等式中，(9)可直接由定义推得；(11)可仿照(10)来証明；(13)可仿照(12)，只須注意到(11)与(10)的不同之点就可以了. 所以在此我們只証明(10)，(12)和(14).

对于等式(10)，可以只限于討論 $j = 1$ 的情形，因为否則，变換原方程組(1)中 j 与 1 的位置，并不改变組(1)的本質，而可以使变成 $j = 1$.

(10)的左边是

$$\frac{d}{dt}\Sigma M^{(1)}_{1,\nu_2\cdots\nu_k}(x_1,\cdots,x_n) = \frac{d}{dt}\Sigma\begin{vmatrix} x_1 & a_{1\nu_2} & \cdots & a_{1\nu_k} \\ x_{\nu_2} & a_{\nu_2\nu_2} & \cdots & a_{\nu_2\nu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{\nu_k} & a_{\nu_k\nu_2} & \cdots & a_{\nu_k\nu_k}\end{vmatrix} =$$

$$= \Sigma\sum_{s=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{1s} & a_{1\nu_2} & \cdots & a_{1\nu_k} \\ a_{\nu_2 s} & a_{\nu_2\nu_2} & \cdots & a_{\nu_2\nu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu_k s} & a_{\nu_k\nu_2} & \cdots & a_{\nu_k\nu_k}\end{vmatrix} x_s =$$

$$= \Sigma\sum_{s=2}^{n}\begin{vmatrix} a_{1s} & a_{1\nu_2} & \cdots & a_{1\nu_k} \\ a_{\nu_2 s} & a_{\nu_2\nu_2} & \cdots & a_{\nu_2\nu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu_k s} & a_{\nu_k\nu_2} & \cdots & a_{\nu_k\nu_k}\end{vmatrix} x_s + \Sigma\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1\nu_2} & \cdots & a_{1\nu_k} \\ a_{\nu_2 1} & a_{\nu_2\nu_2} & \cdots & a_{\nu_2\nu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\nu_k 1} & a_{\nu_k\nu_2} & \cdots & a_{\nu_k\nu_k}\end{vmatrix} x_1, \tag{*}$$

其中 Σ 为对 $\nu_2, \cdots, \nu_k (1 < \nu_2 < \cdots < \nu_k \leqslant n)$ 之各种可能組合求和.

(10)之右边是

$$(-1)^k p_k x_1 - \Sigma M^{(1)}_{1,\nu_2\cdots\nu_{k+1}}(x_1,\cdots,x_n) = (-1)^k p_k x_1 - \Sigma M^{(1)}_{1,\mu_1\cdots\mu_k}(x_1,\cdots,x_n) =$$

$$= (-1)^k p_k x_1 - \Sigma\begin{vmatrix} x_1 & a_{1\mu_1} & \cdots & a_{1\mu_k} \\ x_{\mu_1} & a_{\mu_1\mu_1} & \cdots & a_{\mu_1\mu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{\mu_k} & a_{\mu_k\mu_1} & \cdots & a_{\mu_k\mu_k}\end{vmatrix} =$$

$$= \left[(-1)^k p_k - \Sigma\begin{vmatrix} a_{\mu_1\mu_1} & \cdots & a_{\mu_1\mu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu_k\mu_1} & \cdots & a_{\mu_k\mu_k}\end{vmatrix}\right] x_1 - \Sigma\begin{vmatrix} 0 & a_{1\mu_1} & \cdots & a_{1\mu_k} \\ x_{\mu_1} & a_{\mu_1\mu_1} & \cdots & a_{\mu_1\mu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{\mu_k} & a_{\mu_1\mu_k} & \cdots & a_{\mu_k\mu_k}\end{vmatrix}, \tag{**}$$

其中 Σ 为对 $\mu_1, \cdots, \mu_k$ $(1 < \mu_1 < \cdots < \mu_k \leqslant n)$ 的各种可能組合求和. 我們来証明 $(*) = (**)$.

含 x_1 的項：在(**)中，注意到 $(-1)^k p_k$ 是系数行列式 $|a_{s\sigma}|$ 的所有 k 阶主子行列式的和，而 $\Sigma\begin{vmatrix} a_{\mu_1\mu_1} & \cdots & a_{\mu_1\mu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu_k\mu_1} & \cdots & a_{\mu_k\mu_k}\end{vmatrix}$ 是不含 a_{11} 的所有 k 阶主子行列式的和，因而(**)中 x_1 的系数，是含 a_{11} 的 k 阶主子行列式的和，即(*)中 x_1 的系数. 即(**)中含 x_1 的項等于(*)中含 x_1 的項.

其他的 $x_i\ (i \neq 1)$: 先証(**)中有的項, 在(*)中必有. 事实上, 对任一組合 $\mu_1, \cdots, \mu_k\ (1 < \mu_1 < \cdots < \mu_k \leqslant n)$, 考虑其中任一个 $\mu_i, (1 \leqslant i \leqslant k)$, 对应地, 含 x_{μ_i} 的項是

$$-(-1)^{1+(i+1)}\begin{vmatrix} a_{1\mu_1} & \cdots & a_{1\mu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu_{i-1}\mu_1} & \cdots & a_{\mu_{i-1}\mu_k} \\ a_{\mu_{i+1}\mu_1} & \cdots & a_{\mu_{i+1}\mu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu_k\mu_1} & \cdots & a_{\mu_k\mu_k} \end{vmatrix} x_{\mu_i},$$

而在(*)中, 我們可取 $s = \mu_i,\ v_2 = \mu_1, \cdots v_i = \mu_{i-1},\ v_{i+1} = \mu_{i+1}, \cdots, v_k = \mu_k,\ v_2 \cdots v_k$ 构成一种組合, 得到(*)中含 x_{μ_i} 的同样的一項:

$$\begin{vmatrix} a_{1\mu_i} & a_{1\mu_1} & \cdots & a_{1\mu_{i-1}} & a_{1\mu_{i+1}} & \cdots & a_{1\mu_k} \\ a_{\mu_1\mu_i} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu_{i-1}\mu_i} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu_{i+1}\mu_i} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu_k\mu_i} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{\mu_k\mu_k} \end{vmatrix} x_{\mu_i} = (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{1\mu_1} & \cdots & a_{1\mu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu_{i-1}\mu_1} & \cdots & a_{\mu_{i-1}\mu_k} \\ a_{\mu_{i+1}\mu_1} & \cdots & a_{\mu_{i+1}\mu_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{\mu_k\mu_1} & \cdots & a_{\mu_k\mu_k} \end{vmatrix} x_{\mu_i}.$$

卽証明了(**)有的項(*)必有.

其次証(*)中有的項, 在(**)中必有. 事实上, 对(*)中任取一組合 $v_2 \cdots v_k$ 及 s, 若 $s =$ 某一个 v_σ, 則

$$\begin{vmatrix} a_{1s} & a_{1v_2} & \cdots & a_{1v_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{v_k s} & a_{v_k v_2} & \cdots & a_{v_k v_k} \end{vmatrix} = 0,$$

故只考虑 $s \neq v_\sigma (\sigma = 2, \cdots, k)$. 設 $v_i < s < v_{i+1}$, 則(*)中含 x_s 的項是

$$\begin{vmatrix} a_{1s} & a_{1v_2} & \cdots & a_{1v_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{v_k s} & a_{v_k v_2} & \cdots & a_{v_k v_k} \end{vmatrix} x_s = (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{1v_2} & \cdots & a_{1v_i} & a_{1s} & a_{1v_{i+1}} & \cdots & a_{1v_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{v_k v_2} & \cdots & a_{v_k v_i} & a_{v_k s} & a_{v_k v_{i+1}} & \cdots & a_{v_k v_k} \end{vmatrix} x_s,$$

在(**)中, 取 $\mu_1 = v_2, \cdots, \mu_{i-1} = v_i,\ \mu_{i+1} = v_{i+1}, \cdots \mu_k = v_k,\ \mu_i = s$, 得到同样含 x_s 的一項:

$$-(-1)^{1+(i+1)}\begin{vmatrix} a_{1v_2} & \cdots & a_{1v_i} & a_{1s} & a_{1v_{i+1}} & \cdots & a_{1v_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{v_k v_2} & \cdots & a_{v_k v_i} & a_{v_k s} & a_{v_k v_{i+1}} & \cdots & a_{v_k v_k} \end{vmatrix} x_s,$$

卽証明了(*)中有的, (**)中亦必有. 最后, 注意到(*)中沒有两个行列式是一样的; (**)中亦是如此, 这样就証明了(*) = (**). 等式(10)証毕.

对于(12), 我們分两种情形来証明. 設 σ 为奇数, 由 $\Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n)$ 的定义及(10), 有

$$\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{\sigma-2} & p_\sigma & \cdots & p_{2\sigma-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & p_0 & p_2 & \cdots & p_{\sigma+1} \\ 0 & \cdots & 0 & \Sigma_2 & \cdots & \Sigma_{\sigma+1} \end{vmatrix} =$$

$$
=\begin{vmatrix} p_1 \cdots p_{\sigma-2}\, p_\sigma \cdots p_{2\sigma-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots p_0 \quad p_2 \cdots p_{\sigma+1} \\ 0 \cdots 0 \quad p_2 \cdots p_{\sigma+1} \end{vmatrix} x_j - \begin{vmatrix} p_1 \cdots p_{\sigma-2}\, p_\sigma \cdots p_{2\sigma-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots p_0 \quad p_2 \cdots p_{\sigma+1} \\ 0 \cdots 0 \quad \Sigma_3 \cdots \Sigma_{\sigma+2} \end{vmatrix}
$$

注意到 $p_0 \equiv 1$, $x_j \equiv \Sigma_1$, 则上式就可以化成(12)的右边，对 σ 为奇数証毕．設 σ 为偶数，則有

$$
\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} p_1 \cdots p_{\sigma-1} \cdots p_{2\sigma-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots p_1 \quad \cdots p_{\sigma+1} \\ 0 \cdots \Sigma_1 \quad \cdots \Sigma_{\sigma+1} \end{vmatrix} =
$$

$$
= -\begin{vmatrix} p_1 \cdots p_{\sigma-1} \cdots p_{2\sigma-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots p_1 \quad \cdots p_{\sigma+1} \\ 0 \cdots p_1 \quad \cdots p_{\sigma+1} \end{vmatrix} x_j - \begin{vmatrix} p_1 \cdots p_{\sigma-1} \cdots p_{2\sigma-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots p_1 \quad \cdots p_{\sigma+1} \\ 0 \cdots \Sigma_2 \quad \cdots \Sigma_{\sigma+2} \end{vmatrix},
$$

前一項为零，因而上式等于(12)的右边，(12)証毕．

今証(14)，我們将它們一起写到左边．由 Δ_σ 及 $\Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n)$ 的定义及(12)，有

$$
-\Delta_{\sigma+1}\Delta_{\sigma-1,j}(x_1, \cdots, x_n) + \Delta_{\sigma-1}\Delta_{\sigma+1,j}(x_1, \cdots, x_n) + \Delta_\sigma \frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n) =
$$

$$
= -\begin{vmatrix} p_1 \cdots p_{2\sigma-1}\, p_{2\sigma+1} \\ p_0 \cdots p_{2\sigma-2}\, p_{2\sigma} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots p_\sigma \quad p_{\sigma+2} \\ 0 \cdots p_{\sigma-1}\, p_{\sigma+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 \cdots p_{2\sigma-5}\, p_{2\sigma-3} \\ p_0 \cdots p_{2\sigma-6}\, p_{2\sigma-4} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots p_{\sigma-2}\, p_\sigma \\ 0 \cdots \Sigma_{\sigma-2}\, \Sigma_\sigma \end{vmatrix} +
$$

$$
+\begin{vmatrix} p_1 \cdots p_{2\sigma-1}\, p_{2\sigma+1} \\ p_0 \cdots p_{2\sigma-2}\, p_{2\sigma} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots p_\sigma \quad p_{\sigma+2} \\ 0 \cdots \Sigma_\sigma \quad \Sigma_{\sigma+2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 \cdots p_{2\sigma-5}\, p_{2\sigma-3} \\ p_0 \cdots p_{2\sigma-6}\, p_{2\sigma-4} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots p_{\sigma-2}\, p_\sigma \\ 0 \cdots p_{\sigma-3}\, p_{\sigma-1} \end{vmatrix} -
$$

$$
-\begin{vmatrix} p_1 \cdots p_{2\sigma-3}\, p_{2\sigma-1} \\ p_0 \cdots p_{2\sigma-4}\, p_{2\sigma-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots p_{\sigma-1}\, p_{\sigma+1} \\ 0 \cdots p_{\sigma-2}\, p_\sigma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 \cdots p_{2\sigma-3}\, p_{2\sigma-1} \\ p_0 \cdots p_{2\sigma-4}\, p_{2\sigma-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots p_\sigma \quad p_{\sigma+2} \\ 0 \cdots p_{\sigma-1}\, p_{\sigma+1} \\ 0 \cdots \Sigma_\sigma \quad \Sigma_{\sigma+1} \end{vmatrix}.
$$

如果将上式依次写成 $-AB + CD - EF$，把 A 和 C 按最后一行元素展开，A 中最后一行第 k 列的元素对应的子式記为 D_k，则显然有 $E = D_{\sigma+1}$，将 $-AB + CD$ 中有相同的 D_k 提出来，这样有

$$
-AB + CD - EF = D_{\sigma+1}\begin{vmatrix} p_1 \cdots p_{2\sigma-3}\; 0 \\ p_0 \cdots p_{2\sigma-4}\; 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots p_{\sigma-1}\quad p_{\sigma+1} \\ 0 \cdots \Sigma_\sigma \quad \Sigma_{\sigma+2} \end{vmatrix} - D_\sigma \begin{vmatrix} p_1 \cdots p_{2\sigma-3}\; 0 \\ p_0 \cdots p_{2\sigma-4}\; 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 \cdots p_{\sigma-1}\quad p_{\sigma-1} \\ 0 \cdots \Sigma_\sigma \quad \Sigma_\sigma \end{vmatrix} +
$$

$$
+ D_{\sigma-1}\begin{vmatrix} p_1 \cdots p_{2\sigma-3} & 0 \\ p_0 \cdots p_{2\sigma-4} & 0 \\ \cdots\cdots & \\ 0 \cdots p_{\sigma-1} & p_{\sigma-3} \\ 0 \cdots \Sigma_\sigma & \Sigma_{\sigma-2} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^\sigma D_1 \begin{vmatrix} p_1 \cdots p_{2\sigma-3} & 0 \\ p_0 \cdots p_{2\sigma-4} & 0 \\ \cdots\cdots & \\ 0 \cdots p_{\sigma-1} & 0 \\ 0 \cdots \Sigma_\sigma & 0 \end{vmatrix} -
$$

$$
- D_{\sigma+1}\begin{vmatrix} p_1 \cdots p_{2\sigma-3} & p_{2\sigma-1} \\ p_0 \cdots p_{2\sigma-4} & p_{2\sigma-2} \\ \cdots\cdots & \\ 0 \cdots p_{\sigma-1} & p_{\sigma+1} \\ 0 \cdots \Sigma_\sigma & \Sigma_{\sigma+2} \end{vmatrix}.
$$

合併上式的第一項与最后一項之后,容易看出,上式是下面行列式的 Laplace 展式:

$$
(-1)^{\sigma+1}\begin{vmatrix} p_1 \cdots p_{2\sigma-1} & p_{2\sigma+1} & & \\ p_0 \cdots p_{2\sigma-2} & p_{2\sigma} & 0 & \\ \cdots\cdots & & & \\ 0 \cdots p_\sigma & p_{\sigma+2} & & \\ 0 \cdots 0 & -p_{2\sigma-1} & p_1 \cdots & p_{2\sigma-3} \\ 0 \cdots 0 & -p_{2\sigma-2} & p_0 \cdots & p_{2\sigma-4} \\ \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\ 0 \cdots p_{\sigma-1} & 0 & 0 \cdots & p_{\sigma-1} \\ 0 \cdots \Sigma_\sigma & 0 & 0 \cdots & \Sigma_\sigma \end{vmatrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \sigma\text{个}
$$

$$
\underbrace{\qquad\qquad}_{\sigma+1\text{个}} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{\sigma-1\text{个}}
$$

今将它的第 $2, 3, \cdots, \sigma$ 列分别減去第 $\sigma+2, \sigma+3, \cdots 2\sigma$ 列,然后将第 $3, 4, \cdots \sigma$ 行分别加到第 $\sigma+1, \sigma+2, \cdots 2\sigma-2$ 行上去,得到一个行列式,此行列式是 2σ 阶,在它的左下角有一个 σ 行 $\sigma+1$ 列的矩形块,其元素皆为零,$\sigma+(\sigma+1)=2\sigma+1>2\sigma$,根据行列式中熟知的 Соболев 証明的引理,知此行列式等于零. 等式(14)証毕.

§4. 基本定理的証明 我們着手証明定理.

基本定理的証明 我們将(5)沿(1)的积分曲綫求微商,注意到(9),有

$$
\frac{dV}{dt} = 2\Delta_2\cdots\Delta_n \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n} \Delta_s\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n) =
$$

$$
= -2\Delta_1\cdots\Delta_n\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 2\Delta_2\cdots\Delta_n\sum_{j=1}^{n}(\Sigma M_{\nu_1}^{(j)}(x_1,\cdots,x_n)\,\Delta_{1,j}(x_1,\cdots,x_n)) +
$$

$$
+ 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n-1}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n} \Delta_s\,\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n).
$$

由 (13), $p_n\Delta_{n-1}=\Delta_n$ 及(14), 有

$$
\sum_{\sigma=1}^{n-1}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n} \Delta_s\,\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n) =
$$

$$
= \sum_{\sigma=1}^{n-3}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\pm\sigma_1}}^{n} \Delta_s\,\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n) +
$$

$$
+ \Delta_1\cdots\Delta_{n-4}\Delta_{n-2}\Delta_n\Delta_{n-2,j}(x_1,\cdots,x_n)\frac{d}{dt}\Delta_{n-2,j}(x_1,\cdots,x_n) +
$$

$$+\Delta_1\cdots\Delta_{n-3}\Delta_{n-1}\Delta_{n-1,j}(x_1,\cdots,x_n)\frac{d}{dt}\Delta_{n-1,j}(x_1,\cdots,x_n)=$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{n-3}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n}\Delta_s\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)+$$

$$+\Delta_1\cdots\Delta_{n-4}\Delta_{n-1}\Delta_n\Delta_{n-3,j}(x_1,\cdots,x_n)\Delta_{n-2,j}(x_1,\cdots,x_n)=$$

$$=\sum_{\sigma=1}^{n-4}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n}\Delta_s\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)\frac{d}{dt}\Delta_{\sigma,j}(x_1,\cdots,x_n)+$$

$$+\Delta_1\cdots\Delta_{n-5}\Delta_{n-2}\Delta_{n-1}\Delta_n\Delta_{n-4,j}(x_1,\cdots,x_n)\Delta_{n-3,j}(x_1,\cdots,x_n).$$

繼續用(14)，由归納法，不难証明上式等于

$$\Delta_3\cdots\Delta_n\Delta_{1,j}(x_1,\cdots,x_n)\left[\Delta_{2,j}(x_1,\cdots,x_n)+\Delta_1\frac{d}{dt}\Delta_{1,j}(x_1,\cdots,x_n)\right].$$

$(j=1,2,\cdots,n)$. 如果再注意到

$$\Delta_1=p_1,\ \Delta_2=p_1p_2-p_3,$$

$$\Delta_{2,j}(x_1,\cdots,x_n)=p_1\Sigma M^{(j)}_{\nu_1\nu_2\nu_3}(x_1,\cdots,x_n)-p_3\Sigma M^{(j)}_{\nu_1}(x_1,\cdots,x_n),$$

$$\Delta_{1,j}(x_1,\cdots,x_n)=\Sigma M^{(j)}_{\nu_1\nu_2}(x_1,\cdots,x_n)$$

及(10)，那末立即可得(6)，定理証毕.

§5. 应用　Ляпунов 函数的明显表达式在实际問題中有其重大的用途. 例如可以用它来估計稳定性的稳定区域；可以用它来导出全局稳定性的某些充分条件；可以用它估計具有时滞的微分方程中稳定情形的时滞界限. 我們就最后一种情形作为 Ляпунов 函数应用的一个例子，以結束本文.

在 [3] §5 中，就 $n=2$ 时的常系数綫性微分差分方程

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j(t)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_j(t-\tau_{ij})\tag{15}$$

$$i=1,2,\cdots,n$$

作了稳定情形的时滞 $\tau_{ij}\equiv\tau_{ij}(t)\geqslant0$ 的界限估計. 現在我們根据該文所提供的方法，对一般 n 的稳定情形的时滞界限，給予估計.

我們設 $a_{ij}=c_{ij}+b_{ij}$，那末(15)可以写成

$$\frac{d}{dt}x_i(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(t)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}[x_j(t-\tau_{ij})-x_j(t)],\tag{16}$$

$$i=1,2,\cdots,n.$$

取方程組

$$\frac{d}{dt}x_i(t)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(t)\quad i=1,2,\cdots,n\tag{17}$$

的 Ляпунов 函数(5)，沿(16)的积分曲綫求微商，有

$$\frac{dV}{dt}=-2\Delta_1\cdots\Delta_n\sum_{j=1}^{n}x_j^2(t)+2\Delta_2\cdots\Delta_n\sum_{j=1}^{n}\sum_{\tau=1}^{n}b_{ij}x_i(t)[x_j(t-\tau_{ij})-x_j(t)]+$$

$$+2\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n}\Delta_s\Delta_{\sigma,j}(x_1(t),\cdots,x_n(t))\Delta_{\sigma,j}\left(\sum_{k=1}^{n}b_{1k}(x_k(t-\tau_{1k})-x_k(t)),\cdots\right.$$

$$\cdots, \sum_{k=1}^{n} b_{nk}(x_k(t-\tau_{nk}) - x_k(t))\Big).$$

我們要对 $\Delta_{\sigma,j}(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 进行估計.我們有下述引理.

引理 2 命 $A = \max(c_{ij}, b_{ij}), i, j = 1, 2, \cdots, n$, 則有

$$|\Delta_{\sigma,j}(x_1(t), \cdots, x_n(t))| < (\sigma-1)!(n!)^{\sigma-1}(2A)^{\frac{\sigma(\sigma+1)}{2}} K_\sigma \sum_{q=1}^{n} |x_q(t)|, \tag{18}$$

$$\sigma = 1, 2, \cdots, n-1, j = 1, 2, \cdots, n.$$

$$K_\sigma = \left\{\begin{array}{ll} C_1^{n-1} + C_3^{n-1}\cdot 3! + \cdots + C_\sigma^{n-1}\cdot\sigma! = (n-1) + & \\ \quad + (n-1)(n-2)(n-3) + \cdots + (n-1)\cdots(n-\sigma), & \sigma \text{ 奇数} \\ 1 + C_2^{n-1}\cdot 2! + \cdots + C_\sigma^{n-1}\cdot\sigma! = 1 + & \\ \quad + (n-1)(n-2) + \cdots + (n-1)\cdots(n-\sigma). & \sigma \text{ 偶数} \end{array}\right\} \tag{18'}$$

証. 由 $A = \max(c_{ij}, b_{ij})$, 知 $|a_{ij}| \leqslant 2A$. 今先估計 p_σ, p_σ 是 $|a_{ij}|$ 的諸 σ 阶主子行列式的和(相差一个因子 $(-1)^\sigma$), 这个子行列式共有 C_σ^n 个,每个有 $\sigma!$ 項,每項为 σ 个因子乘积,故有

$$|p_\sigma| \leqslant C_\sigma^n(2A)^\sigma(\sigma!) = n(n-1)\cdots(n-\sigma+1)(2A)^\sigma \leqslant n!(2A)^n, \tag{19}$$

$$\sigma = 1, 2, \cdots, n.$$

再估計 $\Sigma M_{\nu_1,\cdots,\nu_\sigma}^{(j)}(x_1(t), \cdots, x_n(t))$. 它是 $C_{\sigma-1}^{n-1}$ 个 σ 阶行列式的和,每个行列式中 $x_l(t)$ 对应的子式为 $(\sigma-1)$ 阶,此 $(\sigma-1)$ 阶子式的絕对值不超过 $(\sigma-1)!(2A)^\sigma$, 故

$$|\Sigma M_{\nu_1,\cdots,\nu_\sigma}^{(j)}(x_1(t), \cdots, x_n(t))| \leqslant C_{\sigma-1}^{n-1}(2A)^\sigma[(\sigma-1)!]\sum_{q=1}^{n}|x_q(t)|. \tag{20}$$

$$\sigma = 1, 2, \cdots, n$$

最后估計

$$\Delta_{\sigma,j}(x_1(t), \cdots, x_n(t)) = \begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{2\sigma-3} & p_{2\sigma-1} \\ p_0 & \cdots & p_{2\sigma-4} & p_{2\sigma-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & p_{\sigma-1} & p_{\sigma+1} \\ 0 & \cdots & \Sigma_{\sigma-1} & \Sigma_{\sigma+1} \end{vmatrix},$$

它是 a_{ij} 的 $1 + 2 + \cdots + \sigma - 1 + \sigma = \dfrac{\sigma(\sigma+1)}{2}$ 次齐次式,所以在估計时,可以暂时不管因次.我們将上式按最后一行展开成子式,分别估計,但事实上,可以用同一上界来估計这些子式(注意,我們已不管它們的因次了),例如可以考虑 $\Sigma_{\sigma+1}$ 对应的子式

$$\begin{vmatrix} p_1 & \cdots & p_{2\sigma-3} \\ p_0 & \cdots & p_{2\sigma-4} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & p_{\sigma-1} \end{vmatrix},$$

它是 $\sigma-1$ 阶行列式,共有 $(\sigma-1)!$ 項,每項为 $(\sigma-1)$ 个因子相乘,利用对 p_i 的不等式(19),知道上述行列式之值不大于 $(n!)^{\sigma-1}[(\sigma-1)!]$, 再由不等式(20),有

$$|\Delta_{\sigma,j}(x_1(t), \cdots, x_n(t))| \leqslant (n!)^{\sigma-1}[(\sigma-1)!](2A)^{\frac{\sigma(\sigma+1)}{2}} K_\sigma \sum_{q=1}^{n}|x_q(t)|,$$

其中 K_σ 如(18′)所示,引理 2 証毕.

另外,我們命 $\tau = \max(\tau_{ik})$, $(i, k = 1, 2, \cdots, n)$, 有

$$\left.\begin{aligned} |x_k(t-\tau_{ik}) - x_k(t)| &= \left|\int_{t-\tau_{ik}}^{t} \frac{d}{dt} x_k(t)\, dt\right| \leqslant |\tau_{ik}|\,|x'_k(t'_k)| \leqslant \\ &\leqslant \tau A \sum_{m=1}^{n} [\,|x_m(t'_k)| + |x_m(t'_k - \tau_{km})|\,], \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

因此,根据引理 2 及不等式(21),有

引理 3

$$\left|\Delta_{\sigma,j}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{1k}(x_k(t-\tau_{1k}) - x_k(t)), \cdots, \sum_{k=1}^{n} b_{nk}(x_k(t-\tau_{nk}) - x_k(t))\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant (\sigma-1)!(n!)^{\sigma-1}(2A)^{\frac{\sigma(\sigma+1)}{2}} K_\sigma \tau A^2 n \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} [\,|x_m(t'_k)| + |x_m(t'_k - \tau_{km})|\,].$$

現在我們敘述并証明下述定理.

定理　給定实常系数綫性微分差分方程(16),如果略去时滞的微分方程(17)的平凡解是漸近稳定的,并且假設

$$\tau < \frac{1}{2}\,\frac{\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_n}{A^2n^2L\left[1 + \dfrac{4L}{\Delta_2\cdots\Delta_n}\right]}, \tag{21}$$

其中

$$\tau = \max(\tau_{ij}),\ i, j = 1, 2, \cdots, n.$$

$$L = \Delta_2\cdots\Delta_n + n^2\sum_{\sigma=1}^{n-1}\left(\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n}\Delta_s\right)[(\sigma-1)!]^2(n!)^{2(\sigma-1)}(2A)^{\sigma(\sigma+1)}K_\sigma^2, \tag{22}$$

K_σ 如(18′)所示,那末微分差分方程(16)的平凡解也是漸近稳定的.

証. 应用引理 2, 引理 3, 不等式(21)及不等式 $2|\alpha\beta| \leqslant \alpha^2 + \beta^2$, 有

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -2\Delta_1\cdots\Delta_n\sum_{j=1}^{n}x_j^2(t) + \tau\Delta_2\cdots\Delta_n A^2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}[2x_i^2(t) + x_m^2(t'_j) + x_m^2(t'_j - \tau_{jm})] +$$

$$+ \tau n^2A^2\sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{q=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(\prod_{\substack{s=1\\ s\neq\sigma\pm1}}^{n}\Delta_s\right)[(\sigma-1)!]^2(n!)^{2(\sigma-1)}(2A)^{\sigma(\sigma+1)}K_\sigma^2[2x_q^2(t) +$$

$$+ x_m^2(t'_k) + x_m^2(t'_k - \tau_{km})].$$

但是对 $V(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 利用引理 2, 我們有下面的估值

$$\Delta_2\cdots\Delta_n\sum_{j=1}^{n}x_j^2(t) \leqslant V(x_1(t), \cdots, x_n(t)) \leqslant L\sum_{j=1}^{n}x_j^2(t), \tag{23}$$

其中 L 如(22)所示,因此如果 $(x_1(t'_k - \tau_{k1}), \cdots, x_n(t'_k - \tau_{kn}))$ 在 $4V(x_1(t), \cdots, x_n(t))$ 中,即:

$$V(x_1(t'_k - \tau_{k1}), \cdots, x_n(t'_k - \tau_{kn})) \leqslant 4V(x_1(t), \cdots, x_n(t)),$$
$$k = 1, 2, \cdots, n.$$

則由(23),有

$$\sum_{m=1}^{n} x_m^2(t'_k - \tau_{km}) \leqslant \frac{V(x_1(t'_k - \tau_{k1}), \cdots, x_n(t'_k - \tau_{kn}))}{\Delta_2 \cdots \Delta_n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4V(x_1(t), \cdots, x_n(t))}{\Delta_2 \cdots \Delta_n} \leqslant \frac{4L}{\Delta_2 \cdots \Delta_n} \sum_{m=1}^{n} x_m^2(t).$$

同样有

$$\sum_{m=1}^{n} x_m^2(t'_k) \leqslant \frac{4L}{\Delta_2 \cdots \Delta_n} \sum_{m=1}^{n} x_m^2(t),$$

$$k = 1, 2, \cdots, n.$$

因而

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -2\Delta_1 \cdots \Delta_n \sum_{j=1}^{n} x_j^2(t) + 2\tau A^2 n^2 \Delta_2 \cdots \Delta_n \sum_{m=1}^{n} \left(1 + \frac{4L}{\Delta_2 \cdots \Delta_n}\right) x_m^2(t) +$$

$$+ 2\tau A^2 n^4 \sum_{\sigma=1}^{n-1} \left(\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq \sigma \pm 1}}^{n} \Delta_s \right) [(\sigma - 1)!]^2 (n!)^{2(\sigma-1)} (2A)^{\sigma(\sigma+1)} K_\sigma^2 \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{n} \left(1 + \frac{4L}{\Delta_2 \cdots \Delta_n}\right) x_m^2(t) =$$

$$= -2\Delta_1 \cdots \Delta_n \sum_{j=1}^{n} x_j^2(t) + 2\tau A^2 n^2 L \left(1 + \frac{4L}{\Delta_2 \cdots \Delta_n}\right) \sum_{m=1}^{n} x_m^2(t).$$

因为 V 是正定的,当 τ 满足不等式(21)时,保証了 $\frac{dV}{dt}$ 的負定,因而方程組(16)确定的平凡解是漸近稳定的. 即在漸近稳定的意义上讲,当 τ 满足不等式(21)时,可用微分方程(17)来代替微分差分方程(16). 定理証毕.

对于具体的 n, 估值(21)中的 L, 即(22), 可以精确得多, 例如,經过具体計算, 对 $n = 3$, 可取

$$L = [p_3(p_1 p_2 - p_3) + 96\, p_1 p_3 A^2 + 3(p_3 + 24 A^2 p_1)(p_3 + 8 A^2 p_1)](p_1 p_2 - p_3).$$

本文是在秦元勳教授的亲切指导下完成的,作者在此表示衷心的感謝. 此外,还应当感謝李伯鈞、錢祥征两位同志,如果沒有他們的帮助,那末要在国庆节前完成也是困难的.

参 考 文 献

[1] 秦元勳:"运动稳定性一般問題讲义",科学出版社.
[2] Малкин, И. Г., "Теория устойчивости движения", огиз.
[3] 秦元勳、刘永清、王联:"稳定性理論中的微分方程与微分差分方程的等价性問題", 数学学报, 9 (1959), 333—363.

THE FORMULA OF LIAPOUNOFF FUNCTION OF SYSTEM OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

TSAI SUI-LIN
(*He-Fei Industrial University*)

ABSTRACT

We consider system of linear differential equations with constant coefficients

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{1}$$

Liapounoff[1] proved that: if real parts of all roots of the characteristic equation

$$|a_{ij} - \lambda\delta_{ij}| \equiv (-1)^n (\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \cdots + p_n) = 0 \tag{2}$$

are negative, then, for any given negative definite m-th homogeneous polynomial $u(x_1, \cdots, x_n)$, there exists an unique positive definite m-th homogemeous polynomial $V(x_1, \cdots, x_n)$, which satisfies the equation

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)} \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \frac{\partial V}{\partial x_i} = u. \tag{3}$$

In this paper, we shall give the explict form of Liapounoff function V. V can be written in the form of a sum of square terms and its coefficients are functions of the following Routh-Hurwitz determinants:

$$\Delta_1 \equiv p_1,\ \Delta_2 \equiv \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ p_0 & p_2 \end{vmatrix},\ \cdots,\ \Delta_n \equiv \begin{vmatrix} p_1 & p_3 & \cdots & p_{2n-1} \\ p_0 & p_2 & \cdots & p_{2n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{vmatrix} \tag{4}$$

$(p_0 \equiv 1,\ p_k = 0,\ \text{when } k > n)$.

We introduce the following symbols: 1° Take the n-th order determinant $|a_{s\sigma}|$, replace its j-th column by $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ and denote it by $M^{(j)}(x_1, \cdots, x_n)$, then take a minor of $M^{(j)}(x_1, \cdots, x_n)$, the elements of this minor are situated on $v_1, \cdots, v_k$-th columns and $v_1, \cdots, v_k$-th rows $(v_1 < \cdots < v_k)$ of $M^{(j)}(x_1, \cdots, x_n)$, this minor is a k-th determinant, and is denoted by $M^{(j)}_{v_1,\dots,v_k}(x_1, \cdots, x_n)$; 2° Notation $\Sigma M^{(j)}_{v_1,\dots,v_k}(x_1, \cdots, x_n)$ (or for brevity Σ_k) denotes the sum of the $M^{(j)}_{v_1,\dots,v_k}(x_1, \cdots, x_n)$ with respective to the $v_1, \cdots, v_k$, where $v_1, \cdots, v_k$ are all possible combinations of numbers from the set $(1, 2, \cdots, n)$ but the number j should be taken; 3° Replacing all the elements p_{k-1} of the s-th row of the determinant Δ_s by $\Sigma M^{(j)}_{v_1,\dots,v_k}(x_1, \cdots, x_n)$ respectively, we obtain a new determinant which is denoted by $\Delta_{s,j}(x_1, \cdots, x_n)$.

Fundamental Theorem. Given a system of linear differential equations with constant coefficients (1). Denote

$$V = \Delta_2 \cdots \Delta_n \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + \sum_{\sigma=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n} \prod_{\substack{s=1 \\ s\neq\sigma\pm1}}^{n} \Delta_s \Delta^2_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n) \tag{5}$$

$(\Delta_0 \equiv 1)$, then its derivative along the trajectories of the system (1) is

$$\frac{dV}{dt} = -2\Delta_1 \cdots \Delta_n \sum_{j=1}^{n} x_j^2. \tag{6}$$

The proof of this theorem depends on the following lemma:

Lemma 1.

$$\Delta_\sigma \frac{d}{dt} \Delta_{\sigma,j}(x_1, \cdots, x_n) + \Delta_{\sigma-1}\Delta_{\sigma+1,j}(x_1, \cdots, x_n) = \Delta_{\sigma+1}\Delta_{\sigma-1,j}(x_1, \cdots, x_n)$$

$$\sigma = 2, \cdots n-2, \quad j = 1, \cdots, n$$

is an identity.

For $n = 2$, it is the formula of Малкин[2]. We give the formula of $n = 3$ as an example:

$$\left.\begin{aligned} V = {} & p_3(p_1p_2 - p_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + p_1p_3\left[\left(\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} \\ x_2 & a_{22}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & a_{13} \\ x_3 & a_{33}\end{vmatrix}\right)^2 + \right. \\ & + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 \\ a_{21} & x_2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & a_{23} \\ x_3 & a_{33}\end{vmatrix}\right)^2 + \left.\left(\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 \\ a_{31} & x_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & x_2 \\ a_{32} & x_3\end{vmatrix}\right)^2\right] + \\ & + \left[\left(p_3x_1 - p_1\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{22} & a_{23} \\ x_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\right)^2 + \left(p_3x_2 - p_1\begin{vmatrix} a_{11} & x_1 & a_{13} \\ a_{21} & x_2 & a_{23} \\ a_{31} & x_3 & a_{33}\end{vmatrix}\right)^2 + \right. \\ & + \left.\left(p_3x_3 - p_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & x_3\end{vmatrix}\right)^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\frac{dV}{dt} = -2p_1(p_1p_2 - p_3)p_3(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2). \tag{8}$$

At the last of this paper, we give an application of the explict form of Liapounoff function (5). We prove the following theorem.

Theorem Given a system of linear difference-differential equations with constant coefficients

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + b_{ij})x_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(x_j(t - \tau_{ij}) - x_j(t)), \tag{16}$$

$$i = 1, 2, \cdots, n,$$

where $\tau_{ij} \equiv \tau_{ij}(t) \geqslant 0$ $(i, j = 1, \cdots, n)$ are time-lags, and denote

$$\tau = \max(\tau_{ij}) \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

If the trivial solution of the system without time-lags

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + b_{ij})x_j(t) \quad i = 1, \cdots, n \tag{17}$$

is asymptotically stable, then there exists a positive number

$$\Delta(c_{ij}, b_{ij}) \equiv \frac{1}{2} \frac{\Delta_1 \cdots \Delta_n}{A^2n^2L\left[1 + \dfrac{4L}{\Delta_2 \cdots \Delta_n}\right]} > 0,$$

such that the trival solution of (16) is also asymptotically stable, provided that

$$0 < \tau < \Delta(c_{ij}, b_{ij}),$$

where

$$L = \Delta_2 \cdots \Delta_n + n^2 \sum_{\sigma=1}^{n-1} \Big(\prod_{\substack{s=1 \\ s \neq \sigma \pm 1}}^{n} \Delta_s \Big) [(\sigma-1)!]^2 (n!)^{2(\sigma-1)} (2A)^{\sigma(\sigma+1)} K_\sigma^2,$$

$$K_\sigma = \begin{cases} (n-1) + (n-1)(n-2)(n-3) + \cdots + (n-1)\cdots(n-\sigma), & \text{for } \sigma \text{ odd}, \\ 1 + (n-1)(n-2) + \cdots + (n-1)\cdots(n-\sigma), & \text{for } \sigma \text{ even}, \end{cases}$$

and $\Delta_1, \cdots, \Delta_n$ are given in (4) but the a_{ij}'s in then are replaced by $(c_{ij} + b_{ij})$'s respectively.

第9卷 第4期　　数学学报　　Vol. 9, No. 4
1959年12月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Dec., 1959

球上同伦羣的不变量

張素誠
（中国科学院数学研究所）

§1. 設 S^{q+1} 为 $q+1$ 維球. 討論同伦羣 $\Pi_r(S^{q+1})$ 时 H. Hopf[5],[6], G. W. Whitehead[11],[12] P. J. Hilton[3] 等1) 发展了广义 Hopf 不变量,

$$H:\ \Pi_r(S^{q+1}) \to \Pi_r(S^{2q+1}). \tag{1}$$

在同伦羣 $\Pi_r(S^{q+1})$ 中,差数 $r-(q+1)$ 比 $\Pi_r(S^{2q+1})$ 中的差数 $r-(2q+1)$ 大. 在同伦羣的計算中差数小的应該先計算,所以通过 Hopf 不变量利用差数較小的同伦羣表达差数較大的同伦羣的性质,是有意义的. 經过 H. Freudenthal[2] 及 G. W. Whitehead[12] 的推广,知道有一个确列

$$\Pi_{3q-2}(S^q) \xrightarrow{E} \Pi_{3q-1}(S^{q+1}) \xrightarrow{H'} \Pi_{3q-3}(S^{2q-1}) \xrightarrow{[\iota,\iota]} \Pi_{3q-3}(S^q) \xrightarrow{E} \cdots, \tag{2}$$

其中 E 表示同緯映象, $H^1 = E^{-2}H$, $[\iota, \iota]$ 表示 S^q 中的 Whitehead 乘积. 张素誠[1] 曾經証明序列(2)不能拓展,就是說

$$E:\ \Pi_{3q-2}(S^q) \to \Pi_{3q-1}(S^{q+1})$$

的核不仅是 $[\iota, \iota]: \Pi_{3q-2}(S^{2q-1}) \to \Pi_{3q-2}(S^q)$ 的象. 但是确列(2)指出一个同构

$$\Pi_i(S^{q+1})/E\Pi_{i-1}(S^q) \approx H'\,\Pi_i(S^{q+1}) \subset \Pi_{i-1}(S^{2q-1}),\ i = 3q-1, 3q-2, \cdots, \tag{3}$$

它指出差数較小的同伦羣 $\Pi_{i-1}(S^{2q-1})$ 与維数較低的球上的同伦羣 $\Pi_{i-1}(S^q)$ 已知时,可以决定 $\Pi_i(S^{q+1})$ 的一些重要性质. 我們应該研究(3)左端在 $i > 3q-1$ 时的性质. 张素誠[1] 与 I. M. James[7] 发見球, S^q 的約化乘积, S^q_∞ 以后,由于 $\Pi_i(S^q_\infty) \approx \Pi_{i+1}(S^{q+1})$ 故考察确列

$$\cdots \to \Pi_i(S^q) \xrightarrow{i} \Pi_i(S^q_\infty) \xrightarrow{j} \Pi_i(S^q_\infty, S^q) \to \cdots$$

则 i 即 E, 而 j 可定义为广义的 Hopf 不变量,用来代替(3)中的 H'. J. C. Moore[9] 亦从这一个方針出发来討論广义的 Hopf 不变量. 但是在 q 为偶数时, $\Pi_i(S^q_\infty, S^q)$ 除 2 分量与 $\Pi_i(S^{2q+1})$ 相同外2),性质还不够明确. 本文利用重乘法[1]及球的約化乘积,决定一系新的不变量. 对于 $\Pi_{pq+r+1}(S^{q+1})$ $(0 \leqslant r < q-1, p \geqslant 1)$ 中的元素我們有不变量 H_{p-1}, 在 $H^{-1}_{p-1}(0)$ 上定义 K_{p-1}, 在 $K^{-1}_{p-1}(0)$ 上定义 H_{p-2}, 等等. 我們証明 $\alpha \in E\Pi_{pq+r}(S^q)$ 的充要条件是对于 α 不变量 $H_{p-1}, K_{p-1}, \cdots, H_1, K_1$ 均有定义而值均为零. 特别在 $p=3$ 时,我們显然知道 $K_2 = K_1 = 0$, H_2, H_1 成为下列同态:

$$H_2:\ \Pi_{3q+r+1}(S^{q+1}) \to \Pi_{3q+r}(S^{3q}),$$

$$H_1:\ H_2^{-1}(0) \to \Pi_{3q+r}(S^{2q}) + [\Pi_{3q+r}(S^{3q-1})/3\Pi_{3q+r}(S^{3q-1})],\quad q:\ 偶数,$$

$$\to \Pi_{3q+r}(S^{2q})\quad q:\ 奇数,$$

1) 参考[8]与[9].
2) 参考[8]与[10].

$$H_1^{-1}(0) = E\,\Pi_{3q+r}(S^q).$$

在上列各同态中，H_2 与 H_1 的象只与差数比 $q+r$ 小的球上同伦羣有关．又在 $p=2$ 时我們显然知道 $K_1=0$．这时候不变量只有 H_1 一个，它是

$$H_1:\ \Pi_{2q+r+1}(S^{q+1}) \to \Pi_{2q+r}(S^{2q}),$$

显然 H_1 与(2)中的 H' 等价．

§2．作 S^q 的約化乘积，S^q_∞．由[1]或[7]知道有一个同构 ϕ: $\Pi_i(S^{q+1}) \approx \Pi_{i-1}(S^q_\infty)$．

我們記 $i = pq+r+1, 0 \leqslant r < q-1$，并設 $p \geqslant 1$．以 α 为 $\Pi_{pq+r+1}(S^{q+1})$ 中一元素，以 $\phi\alpha$ 的代表为

$$f:\ S^{pq+r} \to S^q_\infty.$$

不妨假定 f 将 S^{pq+r} 映入 S^q_∞ 的 pq 次元截体 $(S^q_\infty)^{pq}$ 中．显然

$$(S^q_\infty)^{pq} = S^q \cup e^{2q} \cup \cdots \cup e^{pq},$$

其中 e^{2q} 由 Whitehead 乘积粘于 S^q，$e^{lq}(p \geqslant l > 2)$ 用重乘法 $[\underbrace{e^{(l-1)q}, \cdots, e^{(l-1)q}}_{e}]$ 粘于 $(S^q_\infty)^{(l-1)q}$．以 E^{lq} 表示欧氏 lq 次元空間中的点集$\{x_1, \cdots, x_{lq})\}$，$0 \leqslant x_h \leqslant 1$，$h=1, \cdots, lq$．对于 e^{lq} 有特征映象

$$\psi:\ E^{lq} \to (S^q_\infty)^{pq}$$

存在，使 $\psi|\dot{E}^{lq} = [e^{(l-1)q}, \cdots, e^{(l-1)q}]$，并且把 E^{lq} 的內部，拓扑地映滿 e^{lq} 的內点．我們另作一胞腔丛

$$(S^q_\infty)^{pq} \cup e_1^{pq} = S^q \cup e^{2q} \cup \cdots \cup e^{pq} \cup e_1^{pq},$$

其中 e_1^{pq} 亦用 $[e^{(l-1)q}, \cdots, e^{(l-1)q}]$ 粘于 $(S^q_\infty)^{(p-1)q}$．为了清楚起見，以

$$\psi_1:\ E^{pq} \to (S^q_\infty)^{pq} \cup e_1^{pq}$$

表示 e_1^{pq} 的特征映象．造一个胞腔复合形 $(S^q_\infty)^{pq} \cup S^{pq}$，其中 S^{pq} 表示 pq 次元球，与 $(S^p_\infty)^{pq}$ 在一点 x_0 相粘，以 S^{pq} 的特征映象为

$$\chi:\ E^{pq} \to S^{pq} \subset (S^q_\infty)^{pq} \cup S^{pq}.$$

对于 E^{pq} 的点用极坐标(ρ, θ)表示，$0 \leqslant \rho \leqslant 1, \theta \in \dot{E}^{pq}$．作一个連續映象

$$\Phi:\ (S^q_\infty)^{pq} \cup e_1^{pq} \to (S^q_\infty)^{pq} \cup S^{pq},$$

使得

$$\Phi|(S^q_\infty)^{(p-1)q} = 1:\ (S^q_\infty)^{(p-1)q} \to (S^q_\infty)^{(p-1)q} \subset (S^q_\infty)^{pq},$$

$$\Phi|e_1^{pq} = \psi\,\psi_1^{-1}:\ \bar{e}_1^{pq} \to \bar{e}^{pq} \subset (S^q_\infty)^{pq},$$

并且使 $\Phi|e^{pq}$ 滿足下列性質：以 x 表示 e^{pq} 中一点，記 $\psi^{-1}(x) = (\rho, \theta)$，則

$$(\Phi|e^{pq})x = \psi_1(2\rho-1, \theta), \qquad \frac{1}{2} \leqslant \rho \leqslant 1,$$

$$= x(2\rho, \theta), \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2};$$

此地我們已假定 e^{pq} 与 e_1^{pq} 中自 x_0 到 $\psi(0, \theta)$或 $\psi_1(0, \theta)$的半直綫已縮成点 x_0．又作一連續映象 Ψ: $(S^q_\infty)^{pq} \cup S^{pq} \to (S^q_\infty)^{pq} \cup e_1^{pq}$ 使得

$$\Psi|(S^q_\infty)^{pq} = 1:\ (S^q_\infty)^{pq} \to (S^q_\infty)^{pq} \subset (S^q_\infty)^{pq} \cup e_1^{pq},$$

又以 y 記 S^{pq} 上一点，記 $\chi^{-1}(y) = (\rho, \theta)$，則

$$(\Psi|S^{pq})(y)=\psi_1(2(1-\rho),\theta),\qquad \frac{1}{2}\leqslant\rho\leqslant 1,$$
$$=\psi(2\rho,\theta),\qquad 0\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{2}.$$

显然 $\Phi\Psi\sim 1$, $\Psi\Phi\sim 1$. 由 $\Phi|(S^q_\infty)^{pq}$ 导出一同态

$$\Phi_*:\ \Pi_{pq+r}((S^q_\infty)^{pq})\rightarrow\Pi_{pq+r}((S^q_\infty)^{pq}\cup S^{pq}).$$

显然

$\Pi_{pq+r}((S^q_\infty)^{pq}\cup S^{pq})=\Pi_{pq+r}(S^{pq})+\Pi_{pq+r}((S^q_\infty)^{pq})+\Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{pq}\times S^{pq}, (S^q_\infty)^{pq}\cup S^{pq})$. 記 $\Pi_{pq+r}((S^q_\infty)^{pq}\cup S^{pq})$ 对于 $\Pi_{pq+r}(S^{pq})+\Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{pq}\times S^{pq},(S^q_\infty)^{pq}\cup S^{pq})$ 的投影为 p, 则得下列同态:

$$H_{p-1}=p\Phi_*:\ \Pi_{pq+r}((S^q_\infty)^{pq})\rightarrow\Pi_{pq+r}(S^{pq})+\Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{pq}\times S^{pq},(S^q_\infty)^{pq}\cup S^{pq}).\tag{4}$$

当 $H_{p-1}(\alpha)=0$ 时, $\Phi_*\phi\alpha$ 的一个代表映 S^{pq+r} 入 $(S^q_\infty)^{pq}$. 記这个代表为 $g:S^{pq+r}\rightarrow(S^q_\infty)^{pq}$. 利用映象 Ψ 作 Ψg 則

$$\Psi g:\ S^{pq+r}\rightarrow(S^q_\infty)^{(p-1)q}\cup e_1^{pq}\subset(S^q_\infty)^{(p-1)q}\cup e_1^{pq}\cup e^{pq}.$$

显然 $\Psi g\sim f$, 所以存在一个映象 $F:S^{pq+r}\times I\rightarrow(S^q_\infty)^{pq}\cup e_1^{pq}$ 使得 $F|S^{pq+r}\times 0=\Psi g$, $F|S^{pq+r}\times 1=f$, $F|y_0\times I$: $y_0\times I\rightarrow x_0$, 其中 y_0 表示 S^{pq+r} 上的参考点. 这个 F 不是唯一的. 把 S^{pq+r} 看作 $\chi(E^{pq+r})$, 于是 F 导出 $F':(E^{pq+r}\times I)\rightarrow(S^q_\infty)^{pq}\cup e_1^{pq}$, 适合 $F'(z\times t)==F(\chi(z)\times t)$, $z\in E^{pq+r}$ 把 $E^{pq+r}\times I$ 看作欧氏 $pq+r+1$ 次元空間中单位方体, 显然 F' 虽存在, 但不能是唯一的. 設 F'': $E^{pq+r}\times I\rightarrow(S^q_\infty)^{pq}\cup e_1^{pq}$, 滿足 $F'|(E^{pq+r}\times I)^\cdot==F''|(E^{pq+r}\times I)^\cdot$, 則 $d(F',F'')\in\Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{pq}\cup e_1^{pq})$.

显然有下列二同态:

$$\Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{pq}\cup e_1^{pq})\xrightarrow{j_1}\Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{pq}\cup e_1^{pq},(S^q_\infty)^{pq})$$
$$\xrightarrow{j_2}\Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{pq}\cup e_1^{pq},(S^q_\infty)^{pq},(S^p_\infty)^{(p-1)q}\cup e_1^{pq}).$$

于是我們可以得到 $\Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{pq}\cup e_1^{pq},(S^q_\infty)^{pq},(S^q_\infty)^{(p-1)q}\cup e_1^{pq})$ 中一个子羣 $j_2j_1\Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{pq}\cup e_1^{pq})$. 由映象 F 决定 $\Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{pq}\cup e_1^{pq},(S^q_\infty)^{pq},(S^q_\infty)^{(p-1)q}\cup e_1^{pq})$ 中一元素, 它唯一决定一个对于 $j_2j_1\Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{pq}\cup e_1^{pq})$ 的余类. 这样对于 $\Pi_{pq+r}(S^q_\infty)$ 的子羣 $H^{-1}_{p-1}(0)$ 定义一个同态:

$$K_{p-1}:\ H^{-1}_{p-1}(0)\rightarrow\Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{pq}\cup e_1^{pq},(S^q_\infty)^{pq},(S^q_\infty)^{(p-1)q}\cup e_1^{pq})\Big/j_2j_1\Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{pq}\cup e_1^{pq}).\tag{5}$$

对于三体同伦羣的边緣运算 β_+, β_- 来說, $\beta_\pm j_2j_1\Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{pq}\cup e_1^{pq})=0$. 故 $\phi\alpha\in\in H^{-1}_{p-1}(0)$, 且 $K_{p-1}\phi\alpha=0$, 将 Ψg 看作 $\Pi_{pq+r}((S^q_\infty)^{(p-1)q}\cup e_1^{pq},(S^q_\infty)^{(p-1)q})$ 的一个元素, 将 f 看作 $\Pi_{pq+r}((S^q_\infty)^{pq},(S^q_\infty)^{(p-1)q})$ 的一个元素, 它們都是零. 即 f: $S^{pq+r}\rightarrow(S^q_\infty)^{pq}$ 可以变形而入 $(S^q_\infty)^{(p-1)q}$ 中, 此时不妨設 f: $S^{pq+r}\rightarrow(S^q_\infty)^{(p-1)q}$. 其逆若 f: $S^{pq+r}\rightarrow(S^q_\infty)^{(p-1)q}$, 則 $H_{p-1}\phi\alpha=0$, $K_{p-1}\phi\alpha=0$. 所以我們証明了

引理 1. 若 f: $S^{pq+r}\rightarrow(S^q_\infty)^{(p-1)q}$ 代表 $\phi(\alpha)$, 則 $H_{p-1}(\alpha)=0$, $K_{p-1}(\alpha)=0$, 其逆亦眞.

为了以后引用方便起見, 在这个引理当中沒有严格考慮 $r<q$ 这一个条件. 当 $r<q$ 时, $K_{p-1}H^{-1}_{p-1}(\alpha)=0$ 恆成立. 以后还要在 §6 中討論.

§3. 上节引理 1 叙述了一个映象 $f: S^{pq+r} \to (S^q_\infty)^{pq}$ 可以变形而映入 $(S^q_\infty)^{(p-1)q}$ 的条件。在过程中并沒有受 $r < q$ 的限制。现在假定 f 可以变形而映入 $(S^q_\infty)^{lq}$ $(l < p)$，羣 $\Pi_{pq+r}((S^q_\infty)^{lq})$ 中一般不止一个元素，它們在 $(S^q_\infty)^{pq}$ 中与映象 f 所代表的元素是一致的。記

$$j: \Pi_{pq+r}((S^q_\infty)^{lq}) \to \Pi_{pq+r}((S^q_\infty)^{pq})$$

为射入映象。映象 f 实际上决定一个余类 $[f] \in \Pi_{pq+r}((S^q_\infty)^{pq})/j^{-1}(0)$。现在

$$(S^q_\infty)^{lq} = S^q \cup e^{2q} \cup e^{3q} \cup \cdots \cup e^{lq},$$

作 $(S^q_\infty)^{lq} \cup e_1^{lq}$，使 e_1^{lq} 与 e^{lq} 用同一映象粘于 $(S^q_\infty)^{(l-1)q}$，于是利用 §2 的方法，仿(4)获得下列同态：

$$\tilde{p}\Phi^l_*: \Pi_{pq+r}((S^q_\infty)^{lq}) \to \Pi_{pq+r}(S^{lq}) + \Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{lq} \times S^{lq}, (S^q_\infty)^{lq} \cup S^{lq}).$$

由于 f 决定一个余类，所以我們定义

$$H_{l-1}[f] = \tilde{p}\Phi_* f / \tilde{p}\Phi_* j^{-1}(0),$$

其中 f 又代表映象 f 所决定的在 $\Pi_{pq+r}((S^q_\infty)^{lq})$ 中的一个元素。我們知道 $K_l^{-1}(0)$ 即 $\Pi_{pq+r}((S^q_\infty)^{lq})/j^{-1}(0)$。这样就得到一个同态：

$$\begin{aligned} H_{l-1}: \Pi_{pq+r}((S^q_\infty)^{lq})/j^{-1}(0) \to [&\Pi_{pq+r}(S^{lq}) + \\ &+ \Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{lq} \times S^{lq}, (S^q_\infty)^{lq} \cup S^{lq})]/\tilde{p}\Phi^l_* j^{-1}(0). \end{aligned} \tag{6}$$

特别当 $H_{l-1}([f]) = 0$ 时，必有 $j^{-1}(0)$ 中一元素 h 存在使 $\tilde{p}\Phi_* f = \tilde{p}\Phi_* h$。因为 f 与 $f-h$ 在 $(S^q_\infty)^{pq}$ 中为同一元素，故可选 $f-h$ 代表 $\phi\alpha$。现在 $f - h \in (p\Phi^l_*)^{-1}(0)$，不过在 $(p\Phi^l_*)^{-1}(0)$ 中 $\phi\alpha$ 的代表不是唯一的。当 $H_{l-1}([f]) = 0$ 时，$\phi(\alpha)$ 的代表在 $(p\Phi^l_*)^{-1}(0)$ 中决定一个余类 $[f] \in (\tilde{p}\Phi^l_*)^{-1}(0)/(\tilde{p}\Phi^l_*)^{-1}(0) \cap j^{-1}(0)$。显然由此获得同态 $\gamma: H^{-1}_{l-1}(0) \to$ $\to (p\Phi^l_*)^{-1}(0)/(p\Phi^l_*)^{-1}(0) j^{-1}(0)$。按 §2 中的方法可以决定同态

$$\begin{aligned} \bar{K}_{l-1}: (p\Phi^l_*)^{-1}(0) \to \Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{lq} \cup e_1^{lq}, (S^q_\infty)^{lq}, \\ (S^q_\infty)^{(l-1)q} \cup e_1^{lq})/j_2 j_1 \Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{lq} \cup e_1^{lq}). \end{aligned}$$

利用 $\bar{K}_{l-1}$ 定义同态

$$\begin{aligned} K'_{l-1}: &(p\Phi^l_*)^{-1}(0)/(p\Phi^l_*)^{-1}(0) \cap j^{-1}(0) \to \\ &\to \Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{lq} \cup e_1^{lq}, (S^q_\infty)^{lq}, (S^q_\infty)^{(l-1)q} \cup e_1^{lq})/j_2 j_1 \Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{lq} \cup e_1^{lq}) \cup \mathfrak{L}, \end{aligned}$$

其中 $\mathfrak{L}$ 表示一組属于 $\Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{lq} \cup e_1^{lq}, (S^q_\infty)^{lq}, (S^q_\infty)^{(l-1)q} \cup e_1^{lq})$ 的元素，它們各个代表 $\bar{K}_{l-1}[(p\Phi^l_*)^{-1}(0) \cap j^{-1}(0)]$，而 $j_2 j_1 \Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{lq} \cup e_1^{lq}) \cup \mathfrak{L}$ 表示由 $j_2 j_1 \Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{lq} \cup$ $\cup e_1^{lq})$ 及 $\mathfrak{L}$ 中的元素所产生的 $\Pi_{pq+r+1}((S^q_\infty)^{lq} \cup e_1^{lq}, (S^q_\infty)^{lq}, (S^q_\infty)^{(l-1)q} \cup e_1^{lq})$ 的子羣。当 $K'_{l-1}[f] = 0$ 时，可在 $[(p\Phi^l_*)^{-1}(0) \cap j^{-1}(0)]$ 中取一元素 h' 使 $p\Phi^l_*(f + h') = 0$ 且 $\bar{K}_{l-1}(f + h') = 0$。以 $f + h'$ 代表 $\phi(\alpha)$，则由 §2 可知 $f + h'$ 可以变形而入 $(S^q_\infty)^{(l-1)q}$ 中。最后定义

$$K_{l-1} = K'_{l-1}\gamma, \tag{7}$$

于是得下述

引理 2. 在 $\Pi_{pq+r}((S^q_\infty)^{lq})/j^{-1}(0)$ 上定义同态 H_{l-1}，在 $H^{-1}_{l-1}(0)$ 上定义同态 K_{l-1}。若 $[f]$ 代表 $\Pi_{pq+r}((S^q_\infty)^{lq})/j^{-1}(0)$ 中一元素，同时满足 $H_{l-1}[f] = 0$，$K_{l-1}[f] = 0$，则 f 可以变形而映入 $(S^q_\infty)^{(l-1)q}$。

§4. 根据引理 1 及引理 2 我們有下述

定理 1. 在羣 $\Pi_{pq+r+1}(S^{q+1})$ $(p \geqslant 1, 0 \leqslant r < q - 1)$ 上按 (4) 定义不变量 H_{p-1}。在

$H_{p-1}^{-1}(0)$上按(5)定义不变量K_{p-1}，一般按(6)在$K_l^{-1}(0)$上定义H_{l-1}，按(7)在$H_{l-1}^{-1}(0)$上定义K_{l-1}. 这样获得一系列的不变量H_{p-1}, K_{p-1}, H_{p-2}, K_{p-2}, $\cdots$, H_1, K_1. 对于$\Pi_{pq+r+1}(S^{q+1})$中一元素α若在$H_{p-1}, K_{p-1}, H_{p-2}, K_{p-2}, \cdots, H_1, K_1$中有一不变量存在使对$\alpha$此不变量之値非零,则$\alpha$不属于同緯映象$E\Pi_{pq+r}(S^q)$，其逆亦眞.

根据这个定理把$\Pi_{pq+r+1}(S^{q+1})$化成H_{p-1}的核对于$H_{p-1}\Pi_{pq+r+1}(S^{q+1})$的拓广. 又把$H_{p-1}^{-1}(0)$写成$K_{p-1}$的核对于$K_{p-1}H_{p-1}^{-1}(0)$的拓广. 这样逐步下去,只要計算这种不变量就可以对計算$\Pi_{pq+r+1}(S^{q+1})$的問題起很多作用.

当$p=2, r=0$时这是H. Freudenthal[2]的結果，在$p=2, r<q-1$时是G. W. Whitehead[12]的結果.

§5. 在§2中所介紹的H_{p-1}的値在$\Pi_{pq+r}(S^{pq})+\Pi_{pq+r+1}((S_\infty^q)^{pq}\times S^{pq},(S_\infty^q)^{pq}\cup S^{pq})$中.显然$\Pi_{pq+r}(S^{pq})$是差数$(pq+r)-pq$比$(pq+r)-(q+1)$小的一个同伦羣. 我們現在再考察$\Pi_{pq+r+1}((S_\infty^q)^{pq}\times S^{pq}, (S_\infty^q)^{pq}\cup S^{pq})$，这是$\Pi_{pq+r}((S_\infty^q)^{pq}\cup S^{pq})$的一个直和部分.作一个空間$S^{q+1}\cup S^{pq+1}$使$S^{q+1}$与$S^{pq+1}$在0点$x_0$粘起来构成作$S^{q+1}\cup S^{pq+1}$中始末均在$x_0$的闭曲綫的集合$\Omega$,在它上面采用緻密开拓扑，我們可以很自然地映$(S_\infty^q)^{pq}\cup$ $\cup S^{pq}$入Ω. 記这个映象为ξ. 于是我們有同态

$$\xi_*\beta\colon \Pi_{pq+r+1}((S_\infty^q)^{pq}\times S^{pq}, (S_\infty^q)^{pq}\cup S^{pq})\to\Pi_{pq+r}(\Omega)\approx\Pi_{pq+r+1}(S^{q+1}\cup S^{pq+1}),$$

其中β表示同伦境界，因为$\Pi_{pq+r+1}((S_\infty^q)^{pq}\times S^{pq}, (S_\infty^q)^{pq}-S^{pq})$經$\xi_*\beta$而获得的在$\Pi_{pq+r+1}(S^{q+1}\cup S^{pq+1})$中的象,与$\Pi_{pq+r+1}(S^{q+1})$无关,故$\xi_*H_{p-1}$是一个差数小于$(pq+r)-$ $-(q+1)$的球上同伦羣的直和[4].

对于$H_{l-1}\ (2\leqslant l<p)$的値也可以同样处理一下.

§6. 在§2中介紹了不变量K_{p-1}. 当时为了叙述的形式方便起見,不在$0\leqslant r<q-1$的限制下去考虑. 但由Blackers-Marsey知道

$$\Pi_\rho((S_\infty^q)^{pq}\cup e_1^{pq}, (S_\infty^q)^{pq}, (S_\infty^q)^{(p-1)q}\cup e_1^{pq})=0,\quad \rho\leqslant 2pq-2.$$

由于$\Pi_r(S^2)\approx\Pi_r(S^3)$，我們不妨設$q\geqslant 2$，又不妨設$p\geqslant 2$，于是$2pq-2\geqslant pq+q>$ $>pq+r+1, 0\leqslant r<q-1$. 所以在考虑$\Pi_i(S^{q+1}), i\leqslant pq+q-2$时$K_{p-1}$恆为零. 若$p\geqslant 3$，則$2(p-1)q-2\geqslant pq+q-2$，所以当$p\geqslant 3$时，如果仅考察$\Pi_i(S^{q+1})$, $i\leqslant pq+q-2$，則不仅$K_{p-1}=0$，而且$K_{p-2}=0$亦成立. 此时不变量只有H_{p-1}, H_{p-2}, $H_{p-3}, K_{p-3}, \cdots, H_1, K_1$. 我們来描述$H_{p-1}, H_{p-2}$如下:我們知道不变量$H_{p-1}$化作

$$H_{p-1}\colon \Pi_i(S^{q+1})\to\Pi_i(S^{pq}),\ i\leqslant pq+q-2,$$

不变量H_{p-2}化作

$$H_{p-2}\colon \Pi_i((S_\infty^q)^{(p-1)q})/j^{-1}(0)\to[\Pi_i(S^{(p-1)2})+$$
$$+\Pi_{i+1}((S_\infty^q)^{(p-1)q}\times S^{(p-1)q}, (S_\infty^q)^{(p-1)q}\cup S^{(p-1)q})]/\tilde{p}\Phi_*^p j^{-1}(0),$$

此地

$$j\colon \Pi_{pq+r}(S^q\cup e^{2q}\cup\cdots\cup e^{(p-1)q})\to\Pi_{pq+r}(S^q\cup e^{2q}\cup\cdots\cup e^{(p-1)q})$$

的核由[13]知道是

$$[\underbrace{e^{(p-1)q}, e^{(p-1)q}, \cdots, e^{(p-1)q}}_{p}]\cdot\Pi_{pq+r}(S^{pq-1}).$$

由[1]中的結果考察Φ^p: $(S_\infty^q)^{(p-1)q}\cup e_1^{(p-1)q}\to(S_\infty^q)^{(p-2)q}\cup e_1^{(p-1)q}\cup S^{(p-1)q}$，于是可得:

引理 3. 当 q 是偶数的时候

$$\Phi_*[e^{(p-1)q}, e^{(p-1)q}, \cdots, e^{(p-1)q}] = [e_1^{(p-1)q}, e_1^{(p-1)q}, \cdots, e_1^{(p-1)q}] + p[S^q, S^{(p-1)q}];$$

当 q 是奇数的时候

$$\Phi_*[e^{(p-1)q}, e^{(p-1)q}, \cdots, e^{(p-1)q}] = [e_1^{(p-1)q}, e_1^{(p-1)q}, \cdots, e_1^{(p-1)q}], \text{当 } p \text{ 是偶数};$$
$$= [e_1^{(p-1)q}, e_1^{(p-1)q}, \cdots, e_1^{(p-1)q}] + [S^q, S^{(p-1)q}], \quad \text{当 } p \text{ 是奇数}.$$

証.
$$\left.\begin{aligned}\Phi_*[e^{(p-1)q}, e^{(p-1)q}, \cdots, e^{(p-1)q}] &= [\Phi e^{(p-1)q}, \Phi e^{(p-1)q}, \cdots, \Phi e^{(p-1)q}] = \\ &= [e_1^{(p-1)q}, \Phi e^{(p-1)q}, \cdots, \Phi e^{(p-1)q}] + [S^q, S^{(p-1)q}] = \\ &= (-)^q[\Phi e^{(p-1)q}, e_1^{(p-1)q}, \Phi e^{(p-1)q}, \cdots, \Phi e^{(p-1)q}] + [S^q, S^{(p-1)q}].\end{aligned}\right\}$$

由 [1] 重复 p 次就得到要証的結果.

利用引理 3 容易把 H_{p-2} 化成下列同态：

$$H_{p-2}\colon \Pi_i((S^q_\infty)^{(p-1)q})^\cdot/j^{-1}(0) \to \Pi_i(S^{(p-1)q}) + \Pi_i(S^{pq-1})/p\Pi_i(S^{pq-1}), \quad q \text{ 是偶数};$$
$$\to \Pi_i(S^{(p-1)q}) + \Pi_i(S^{pq-1}), \quad q \text{ 是奇数}, p \text{ 是偶数},$$
$$\to \Pi_i(S^{(p-1)q}), \quad p, q \text{ 均为奇数}.$$

由 H_{p-2} 的形式可以預見任何質数的冪为周期的循环羣可能出現. 特别取 $p=3$ 于是在 $i \leqslant 4q-2$ 时不变量有 H_2, H_1 两个而得下列

定理 2. 設 q 是偶数，$\rho \leqslant 4q-2$，則 $\Pi_\rho(S^{q+1})$ 是 $\Pi_{\rho-1}(S^{3q})$ 的一个子羣对于 $H_2^{-1}(0)$ 的拓广，$H_2^{-1}(0)$ 是 $\Pi_{\rho-1}(S^{2q}) + (\Pi_{\rho-1}(S^{3q-1})/3\Pi_{\rho-1}(S^{3q-1}))$ 的一个子羣对 $E\Pi_{\rho-1}(S^q)$ 的拓广. 設 q 是奇数，那末 $H_2^{-1}(0)$ 是 $\Pi_{\rho-1}(S^{2q})$ 的一个子羣对于 $E\Pi_{\rho-1}(S^q)$ 的拓广.

参考文献

[1] 张素誠，球与特殊多面体有同构的同伦羣論，数学学报，1954.

[2] Freudenthal, H., Über die Klassen von Sphärenabbildungen, I, *Comp. Math.*, **5** (1937), 299—314.

[3] Hilton, P. J., Suspension theorems and the generalijed Hopf invariant, *Proc. L. M. S.* (3), **2** (1951), 462—93.

[4] Hilton, P. J., On the homotopy groups of the union of spheres, *Journ. L. M. S.*, **30** (1955), 154—72.

[5] Hopf, H., Über die Abbildungen der dreidimensionaln Sphäre auf die Kugelfläche, *Math. Ann.*, **104**, (1931), 639—65.

[6] Hopf, H., Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension, *Fund. Math.*, **25** (1935), 427—440.

[7] James, I. M., On the iterated suspension, *Quart. J. Math.*, Oxford, **5** (1954), 1—10.

[8] James, I. M., Reduced product spaces, *Ann. of Math.*, **62** (1955), 170—97; On the suspension triad, *ibid.*, **63** (1956), 191—247; On the suspension triad of a sphere, *ibid.* 407—430; On the suspension sequence, *ibid.*, **65** (1957), 74—107.

[9] Moore, J. C., Le théoréme de Freudenthal, la suite exacte de James et l'invariant de Hopf généralijé, Seminaire Heuri Cartan, 1954—55, No. 22.

[10] Toda, T., On the double suspension E^2, *Journ. of the institute of polytechnies, Osaka city Univ., Series A, Math.*, **7** (1956), 103—145.

[11] Whitehead, G. W., Generalization of the Hopf invariant, *Annals of Math.*, **51** (1950), 192—238.

[12] Whitehead, G. W., On the Freudenthal theorems, *Annals of Math.*, **57** (1953), 209—228.

[13] Whitehead, J. H. C., On the groups $\Pi_r(V_{m,n})$ and sphere bundles, *Proc. L.M.S.*, **6** (1944), 243—291.

ON INVARIANTS ASSOCIATED WITH HOMOTOPY GROUPS OF SPHERES

CHANG SU-CHENG
(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

By the reduced product, S^n_∞, of a sphere, S^n, we mean the CW-complex

$$S^n_\infty = S^n \cup e^{2n} \cup e^{3n} \cup \cdots \cup e^{rn} \cup \cdots,$$

where e^{rn} is attached to the $(r-1)$ n-skeleton, $(S^n_\infty)^{(r-1)n}$, of S^n_∞ by the secondary product according to [1]. In [1] and [7] it has been independently proved that

$$\Pi_r(S^n_\infty) \approx \Pi_{r+1}(S^{n+1}),$$

here we consider the complex $(S^n_\infty)^{(r-1)n} \cup e^{rn} \cup e'^{rn}$, e'^{rn} being attached to $(S^n_\infty)^{(r-1)n}$ by the same map as e^{rn}. Then

$$\Pi_p((S^n_\infty)^{rn} \cup e'^{rn}) \approx \Pi_p((S^n_\infty)^{(r-1)n} \cup e'^{rn}) + \Pi_p(S^{rn}) + \\ + \Pi_{p+1}\{(S^n_\infty)^{rn-n} \cup e^{rn} \cup e'^{rn}, (S^n_\infty)^{rn}, (S^n_\infty)^{(r-1)n} \cup e'^{rn}\}.$$

Let g: $S^p \to (S^n_\infty)^{rn}$ represent an element $\{g\}$ of $\Pi_p((S^n_\infty)^{rn})$. By j: $(S^n_\infty)^{rn} \to (S^n_\infty)^{rn} \cup e'^{rn}$ we mean an injection and p: $\Pi_p((S^n_\infty)^{rn} \cup e'^{rn}) \to \Pi_p(S^{rn}) +$

$$+ \Pi_{p+1}\{((S^n_\infty)^{(r-1)n} \cup e'^{rn}) \times S^{rn}, (S^n_\infty)^{(r-1)n} \cup e'^{rn} \cup S^{rn}\}$$

we mean a projection. If $pj_*\{g\} = 0$, there is a homotopy F: $S^p \times I \to (S^n_\infty)^{rn} \cup e'^{rn}$ such that $F|S^p \times 0 = g$ and $F|S^p \times 1$: $S^p \to (S^n_\infty)^{(r-1)n} \cup e'^{rn}$. This homotopy supplies an element of $\Pi_{p+1}((S^n_\infty)^{rn} \cup e'^{rn}, (S^n_\infty)^{rn}, (S^n_\infty)^{(r-1)n} \cup e'^{rn})$. With this view point the anthor defines bomomorphisms

$$H_{p-1}, K_{p-1}, H_{p-2}, K_{p-2}, \cdots, H_1, K_1 \tag{1}$$

such that H_{p-1} is defined upon $\Pi_{pn+r+1}(S^{n+1})$, $0 \leqslant r \leqslant n-1$, K_l upon $H_l^{-1}(0)$ and H_j upon $K_{j+1}^{-1}(0)$, $j = 1, \cdots, p-2$. Then he proves the following

Theorem. To each element α of $\Pi_{pn+r+1}(S^{n+1})$ either there is an element β of $\Pi_{pn+r}(S^n)$ such that $\alpha = E\beta$, E being the suspension homomorphism, or there is one of the $2(p-1)$ homomorphisms in (1) denoted by G so that G is defined on α and $G(\alpha) \neq 0$.

If $p = 2$ the anthor shows that $K_1 = 0$, meanwhile H_1 is actually the Hopf invariant defined by G. W. Whitehead. If $p = 3$ the anthor shows that $K_2 = K_1 = 0$ and H_2, H_1 are explicitly expressed as follows:

$$H_2: \Pi_{3n+r+1}(S^{n+1}) \to \Pi_{3n+r}(S^{3n}),$$

$$H_1: \quad H_2^{-1}(0) \to \begin{cases} \Pi_{3n+r}(S^{2n}) + \Pi_{3n+r}(S^{2n-1})/3\,\Pi_{3n+r}(S^{3n-1}), \\ \qquad \text{if } n \text{ is even}, \\ \Pi_{3n+r}(S^{2n}), \text{ if } n \text{ is odd}. \end{cases}$$

第9卷 第4期　　数 学 学 报　　Vol. 9, No. 4
1959 年 12 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Dec., 1959

复合形在欧氏空間中的同痕問題(I)

吳 文 俊
(中国科学院数学研究所)

作者曾經指出，一个空間的約化积这一概念对于非同伦性的拓扑問題頗为有用，并曾应用之以研究空間在一欧氏空間中的实現問題，局部实現問題，同痕与同位問題，以及其他一些有关問題(参閱例如[1]，与該处文献)．近来作者又曾証明[2]对于一个有限复合形在一欧氏空間中的任两綫性实現，从复合形的約化积可导出一些不变量来，它們之为0給出了两个实現綫性同痕的必要条件，而在临界情形，即欧氏空間的維数等于复合形維数的两倍加1的情形，(复合形維数假定 >1) 这些必要条件又同时是充分的．本文及以下一文将給出这一工作的詳細情况，这里的第一部分目的在引入綫性同痕这一概念以及上述两个綫性实現間的不变量，以后的第二部分将給出临界情形中充分性定理的詳細証明．

§1. 在周期变换下空間的一些引論

設 $\tilde{K}$ 是一个抽象的复合形，由維数是 i 的胞腔 σ_α^i 所組成，其面关系 $\prec$ 与相联系数 $[\sigma_\alpha^i, \sigma_\beta^{i-1}]$ 滿足通常那些条件．同样 $\tilde{K}'$ 亦然．我們将称 T 为一 $\tilde{K}$ 到 $\tilde{K}'$ 中的**胞腔运算子**，假如 T 是 $\tilde{K}$ 到 $\tilde{K}'$ 中的一个胞腔对应，保持維数与面关系且除記号外也保持相关系数．最后一語意指有数 $\varepsilon_\alpha^i = \pm 1$ $(\varepsilon_\alpha^0 = +1)$ 存在使

$$[T\{\sigma_\alpha^i\}, T\{\sigma_\beta^{i-1}\}] = \varepsilon_\alpha^i \cdot \varepsilon_\beta^{i-1} \cdot [\sigma_\alpha^i, \sigma_\beta^{i-1}].$$

胞腔运算子 T 所引起下鏈羣与上鏈羣間的准同构仍将記之为 T．对于 $\tilde{K}$ 到 $\tilde{K}'$ 中的任一組胞腔运算子 $T_1, \cdots, T_r$ 以及整数 $a_1, \cdots, a_r$，和 $\Sigma a_i T_i$ 将称为 $\tilde{K}$ 到 $\tilde{K}'$ 的一个**运算子**而所自然引起 $\tilde{K}$ 到 $\tilde{K}'$ 中的下鏈羣与上鏈羣間的准同构也将以同記号表示之．

設复合形 $\tilde{K}$ 具有 $\tilde{K}$ 到它自身的一个胞腔运算子 T，沒有固定的胞腔且有周期 p，此处 p 是一固定质数．我們将說 $(\tilde{K}, T)$ 是一个**周期是 p 的簡单組**．与通常那样，我們将以 ρ 表下二运算子之一：

$$d = 1 - T,$$
$$s = 1 + T + \cdots + T^{p-1},$$

而以 $\bar{\rho}$ 表另一个．命 $C^r(\tilde{K})$ 与 $Z^r(\tilde{K})$ 各为維数是 $r \geqslant 0$ 的整系数下鏈羣与下閉鏈羣．在 ${}^\rho C^r(\tilde{K}, T) = \ker \rho \cap C^r(\tilde{K}) = \bar{\rho} C^r(\tilde{K})$ 与 ${}^\rho Z^r(\tilde{K}, T) = \ker \rho \cap Z^r(\tilde{K})$ 中的元素将各称为維数是 r 的 ρ-**上鏈**与 ρ-**上閉鏈**．因 $\delta \bar{\rho} C^{r-1}(\tilde{K}) = \delta^\rho C^{r-1}(\tilde{K}) \subset {}^\rho Z^r(\tilde{K}, T)$，故可定义**特殊上同調羣** ${}^\rho H^r(\tilde{K}, T)$ 为

$${}^\rho H^r(\tilde{K}, T) = \begin{cases} {}^\rho Z^r(\tilde{K}, T) / \delta \bar{\rho} C^{r-1}(\tilde{K}), & r > 0, \\ {}^\rho Z^r(\tilde{K}, T), & r = 0. \end{cases}$$

其中元素称为 ρ-**上同調类**．我們有时将应用記号 $Z \underset{\rho}{\sim} 0$ (或 $Z_1 \underset{\rho}{\sim} Z_2$)，如果 $Z \in \delta\, {}^\rho C^r(\tilde{K}, T)$ (或 $Z_1 - Z_2 \in \delta\, {}^\rho C^r(\tilde{K}, T)$)．此时称 Z ρ-**上同調**于 0 (或 Z_1 与 Z_2 ρ-**上同調**)．

对特殊上同調羣而言有以下由 Thom 重述的所謂 Smith–Richardson 确列:

$$^{\bar{\rho}}H^0(\tilde{K},T) \to H^0(\tilde{K}) \to {}^{\rho}H^0(\tilde{K},T) \to \cdots$$
$$\cdots \to H^r(\tilde{K}) \xrightarrow{\alpha_\rho} {}^{\rho}H^r(\tilde{K},T) \xrightarrow{\beta_\rho} {}^{\bar{\rho}}H^{r+1}(\tilde{K},T) \xrightarrow{\gamma_\rho} H^{r+1}(\tilde{K}) \to \cdots \quad (1)$$

确列中的諸准同构各如下定义:

α_ρ 为由对应 $u \to \bar{\rho}u$ 所引出,此处 $u \in Z^r(\tilde{K})$,

β_ρ 为由对应 $\bar{\rho}v \to \delta v \bmod \delta\, {}^{\rho}C^r(\tilde{K},T)$ 所引出,此处 $\bar{\rho}v \in {}^{\rho}Z^r(\tilde{K},T)$,

而 γ_ρ 为由对应 $w \to w$ 所引出,此处 $w \in {}^{\bar{\rho}}Z^{r+1}(\tilde{K},T)$.

設 $(\tilde{K},T)$ 与 $(\tilde{K}',T')$ 为有相同周期 p 的两个簡单組而 $\tilde{f}: \tilde{K} \to \tilde{K}'$ 为一胞腔运算子,与 T,T' 可交换. 此时 $\tilde{f}$ 将称为一个組映象而将記作 $\tilde{f}$: $(\tilde{K},T) \to (\tilde{K}',T')$. 任一这样的映象将自然地引出一組准同构

$$^{\rho}\tilde{f}^*: {}^{\rho}H^r(\tilde{K}',T') \to {}^{\rho}H^r(\tilde{K},T).$$

显見 $^{\rho}\tilde{f}^*$ 与上述准同构 α_ρ,β_ρ 与 γ_ρ 等可交换.

設空間 $\tilde{X}$ 具有一拓扑变换 T,T 沒有固定点而有質数周期 p. 我們将称 $(\tilde{X},T)$ 是一周期为 p 的簡单組. 此拓扑变换 T 在奇异复合形 $S(\tilde{X})$ 中引起一个胞腔运算子,无固定胞腔而有周期 p,我們将以同一記号 T 表之. 此时羣 $^{\rho}H^r(S(\tilde{X}),T)$ 等等,将簡記为 $^{\rho}H^r(\tilde{X},T)$,等等. 特別若 $\tilde{X}$ 自身是一个复合形 $\tilde{K}$ 的空間,即 $\tilde{X} = |\tilde{K}|$, 且 $\tilde{K}$ 中无固定胞腔而有周期 p 的运算子 T 即为由空間 $\tilde{X}$ 中无固定点且有周期 p 的拓扑变换 T 所引起者时,有确定的准同构

$$\tilde{\lambda}: {}^{\rho}H^r(\tilde{K},T) \approx {}^{\rho}H^r(\tilde{X},T)$$

存在,因之它們将直接地恆同为一. 在此时我們并将称組 $(\tilde{K},T)$ 与組 $(\tilde{X},T)$ 是相关的.

設 $(\tilde{X},T)$ 与 $(\tilde{X}',T')$ 是两个有相同質数周期 p 的簡单組而 $\tilde{f}$ 是 $\tilde{X}$ 到 $\tilde{X}'$ 的一个連續映象,与 T,T' 可交换. 此时 $\tilde{f}$ 将称为这些組的組映象而記作 $\tilde{f}$: $(\tilde{X},T) \to (\tilde{X}',T')$. 这样的組映象将引起准同构

$$^{\rho}\tilde{f}^*: {}^{\rho}H^r(\tilde{X}',T') \to {}^{\rho}H^r(\tilde{X},T).$$

特別,若 $\tilde{X} = |\tilde{K}|, \tilde{X}' = |\tilde{K}'|$, $(\tilde{K},T)$ 与 $(\tilde{K}',T')$ 各与 $(\tilde{X},T)$, $(\tilde{X}',T')$ 相关,又 $\tilde{f}$: $(\tilde{X},T) \to (\tilde{X}',T')$ 引出胞腔运算子 $\tilde{g}$: $(\tilde{K},T) \to (\tilde{K}',T')$,則組映象 $\tilde{g}$ 将称为与組映象 $\tilde{f}$ 相关. 在此时 $^{\rho}\tilde{f}^*$, $^{\rho}\tilde{g}^*$ 与前述确定准同构 $\tilde{\lambda}$ 可交换.

两个組映象 $\tilde{f}_i$: $(\tilde{X},T) \to (\tilde{X}',T')$, $i = 0,1$, 将称为組同伦的, 如果以下成立: 命 $(\tilde{X} \times I,T)$ 为由 $T(x,t) = (T(x),t)$, $x \in \tilde{X}, t \in I$, 所定义的簡单組, 此处 I 为单位綫段 $[0,1]$. 則有一組映象 $\tilde{F}$: $(\tilde{X} \times I,T) \to (\tilde{X}',T')$ 使 $\tilde{F}(x,0) = f_0(x)$, $\tilde{F}(x,1) = f_1(x)$, $x \in \tilde{X}$. 此时 $\tilde{F}$ 将称为組映象 $\tilde{f}_0$ 与 $\tilde{f}_1$ 間的一个組同伦.

簡单組 $(\tilde{X},T)$ 将称为簡单組 $(\tilde{X}',T')$ 的一个子組, 如果 $\tilde{X}$ 是 $\tilde{X}'$ 的一个子空間,而 $T = T'/\tilde{X}$. $(\tilde{X}',T')$ 的子組 $(\tilde{X},T)$ 将称为 $(\tilde{X}',T')$ 的一个組变状收縮核, 如果有一組映象 $\tilde{F}$: $(\tilde{X}' \times I,T') \to (\tilde{X}',T')$ 存在 ($(\tilde{X}' \times I,T')$ 如前定义)使, 在定义 $\tilde{f}_t: \tilde{X}' \to \tilde{X}'$ 如 $\tilde{f}_t(x') = \tilde{F}(x',t)$, $t \in I, x' \in \tilde{X}'$ 时, $\tilde{f}_0$ 为恆同映象而 $\tilde{f}_1(\tilde{X}') \subset \tilde{X}$, $\tilde{f}_t(\tilde{X}) \subset \tilde{X}$, $t \in I$. 此时映象 $\tilde{F}$ 将称为 $(\tilde{X}',T')$ 到 $(\tilde{X},T)$ 中的一个組变状收縮.

以下两定理可从定义簡单地推得:

引定理 1. 若两个簡单組間的組映象 $\tilde{f}_0,\tilde{f}_1$: $(\tilde{X},T)\to(\tilde{X}',T')$ 是組同伦的，則 $^{\rho}\tilde{f}_0^* =$
$= {}^{\rho}\tilde{f}_1^*$.

引定理 2. 若簡单組 $(\tilde{X},T)$ 是簡单組 $(\tilde{X}',T')$ 的一个組变状收縮核，則有

$$^{\rho}\tilde{i}^*:\ {}^{\rho}H^r(\tilde{X}',T')\approx{}^{\rho}H^r(\tilde{X},T),$$

此处 $\tilde{i}$: $(\tilde{X},T)\to(\tilde{X}',T')$ 系由包含映象 $\tilde{i}:\tilde{X}\subset\tilde{X}'$ 所引起.

引定理 3*. 对于一个 $N-1$ 維球 $S^{N-1}(N>1)$ 与其上无固定点而有質数周期 p 的一个拓扑变换 T 而言，有

$$\left.\begin{array}{l}
{}^sH^1(S^{N-1},T)\approx{}^dH^2(S^{N-1},T)\approx{}^sH^3(S^{N-1},T)\approx\cdots\approx{}^{\rho_N}H^{N-2}(S^{N-1},T)\approx Z_p,\\
{}^dH^0(S^{N-1},T)\approx Z,\\
{}^sH^0(S^{N-1},T)={}^dH^1(S^{N-1},T)={}^sH^2(S^{N-1},T)=\cdots={}^{\bar{\rho}_N}H^{N-2}(S^{N-1},T)=0,\\
{}^{\rho_N}H^{N-1}(S^{N-1},T)\approx Z,\\
{}^{\bar{\rho}_N}H^{N-1}(S^{N-1},T)\approx Z_p,\\
{}^{\rho}H^r(S^{N-1},T)=0,\ r\geqslant N.
\end{array}\right\}\quad(2)$$

其中 Z 为整数羣，Z_k 为模 k 整数羣，而

$$\rho_N=\begin{cases}d,\ N\text{ 为偶数},\\ s,\ N\text{ 为奇数},\end{cases}$$

$$\bar{\rho}_N=\begin{cases}s,\ N\text{ 为偶数},\\ d,\ N\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

特别有 $p=2$ 时，

$$\rho_N=1+(-1)^{N-1}T,\quad \bar{\rho}_N=1+(-1)^NT.$$

証. 取一 S^{N-1} 的胞腔剖分，仍記之为 S^{N-1}，使其在 T 下不变，因而 T 为此复合形中的运算子. 命 Z^0 为 S^{N-1} 中的单位上类，在所有頂点上取值 1. 則 Z^0 是一 d- 上閉鏈且产生 ${}^dH^0(S^{N-1},T)={}^dZ^0(S^{N-1},T)\approx Z$，而 ${}^sH^0(S^{N-1},T)=0$. 准同构 α_d: $H^0(S^{N-1})\to{}^dH^0(S^{N-1},T)$映 Z^0 的上同調类为 $p\{Z^0\}_d$，此处 $\{Z^0\}_d$ 指含有 d- 上閉鏈 Z^0 的 d- 上同調类.

暂設 $N>2$. 則由确列（${}^\rho H^r, H^r$ 等各为 ${}^\rho H^r(S^{N-1},T)$, $H^r(S^{N-1})$ 等的簡写）

$$0={}^sH^0\to H^0\xrightarrow{\alpha_d}{}^dH^0\to{}^sH^1\to H^1=0$$

与已知准同构 α_d 得 ${}^sH^1\approx Z_p$. 由确列

$$0={}^sH^0\to{}^dH^1\to H^1=0$$

得 ${}^dH^1=0$，最后由确列

$$H^r\to{}^\rho H^r\to{}^{\bar{\rho}}H^{r+1}\to H^{r+1}$$

得 ${}^\rho H^r\approx{}^{\bar{\rho}}H^{r+1}, 0<r<N-2$. 合之得 $(2)_1$—$(2)_3$. 此处 $N\geqslant 2$（$N=2$ 的情形是不足道的）.

次由确列 $H^{N-1}(\approx Z)\to{}^\rho H^{N-1}\to{}^{\bar{\rho}}H^N(=0)$ 知 ${}^\rho H^{N-1}$ 祇能为 0，或 Z 或某一 $Z_k, k>1$. 仍暂設 $N>2$，而考察确列

$$H^{N-2}(=0)\to{}^{\rho_N}H^{N-2}(\approx Z_p)\xrightarrow{\beta}{}^{\bar{\rho}_N}H^{N-1}\xrightarrow{\gamma}H^{N-1}(\approx Z)\xrightarrow{\alpha}{}^\rho H^{N-1}\to{}^{\bar{\rho}_N}H^N(=0).$$

* 实际上从 Lefschetz 的定理可知 $p>2$ 时 N 必为偶数，但这一点我們并不需要.

因β是一同构入,故${}^{\bar{p}_N}H^{N-1}$祇能为某一Z_k, $k>1$. 于是必有$\gamma=0$. 由此得β: ${}^{\rho_N}H^{N-2}\approx{}^{\bar{p}_N}H^{N-1}\approx Z_p$而$\alpha$: $H^{N-1}\approx{}^{\rho_N}H^{N-1}\approx Z$. 这証明了$N>2$时的$(2)_4$与$(2)_5$. 今設$N=2$而考察确列

$$H^0(\approx Z)\xrightarrow{\alpha}{}^dH^0(\approx Z)\xrightarrow{\beta}{}^sH^1\xrightarrow{\gamma}H^1(\approx Z)\xrightarrow{\alpha}{}^dH^1\rightarrow{}^sH^2(=0).$$

因${}^sH^1$含有子羣${}^dH^0/\alpha H^0\approx Z_p$, 故祇能为某一$Z_k$, $k>1$. 于是与前同样有$\gamma=0$而α: $H^1\approx{}^dH^1\approx Z$, ${}^sH^1\approx{}^dH^0/\alpha H^0\approx Z_p$. 这証明了$N=2$时的$(2)_4$与$(2)_5$.

因$(2)_6$显然,故定理已完全証明.

附注. 由証明可知

$$\alpha=\alpha_{\rho N}:\ H^{N-1}(S^{N-1})\approx{}^{\rho_N}H^{N-1}(S^{N-1},T)\approx Z.$$

故若S^{N-1}定向而以Σ^{N-1}为$H^{N-1}(S^{N-1})$与此定向相当的母素时, $\alpha(\Sigma^{N-1})$为${}^{\rho_N}H^{N-1}(S^{N-1},T)$的一个确定的母素,将記作${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}(\overset{+}{S}{}^{N-1},T)$,此处$\overset{+}{S}{}^{N-1}$表有确定定向的球$S^{N-1}$. 若$S^{N-1}$改变定向,则${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}(\overset{+}{S}{}^{N-1},T)$将改变記号.

§2. 一个空間的約化积

对任一空間X与任一质数p命$\widetilde{X}_p^*$为X的p重約化积,即p重拓扑积$\underbrace{X\times\cdots\times X}_{p}$除去对角形$\Delta_X$后的空間. 命$T_X$为$\widetilde{X}_p^*$中的巡迴变换,定义如

$$T_X(x_1,\cdots,x_p)=(x_2,\cdots,x_p,x_1),\ (x_1,\cdots,x_p)\in\widetilde{X}_p^*.$$

于是$(\widetilde{X}_p^*,T_X)$为一簡单組. 我們将置

$${}^{\rho}H^r(\widetilde{X}_p^*,T_X)={}^{\rho}\widetilde{H}^r_{(p)}(X).$$

命R^N为一N維的欧氏空間. 在$\underbrace{R^N\times\cdots\times R^N}_{p}$中試考子空間$\widetilde{L}_{p,N}$, 后者由一切满足$\sum_{i=1}^{p}x_i=0$, $\sum_{i=1}^{p}|x_i|^2=1$的向量組$(x_1,\cdots,x_p)$所成,此处$x_i\in R^N$, 而$|x|$指R^N中向量x的长度. 显然$\widetilde{L}_{p,N}\subset(\widetilde{R}^N)_p^*$而为一$(p-1)N-1$維球, 又$T=T_{R^N}$亦为$\widetilde{L}_{p,N}$到自身的一个拓扑变换,因之$(\widetilde{L}_{p,N},T)$为$((\widetilde{R}^N)_p^*,T)$的一个子組. 下述定理在作者所发展了的实现理論中占基本地位,以下为一簡单的証明:

定理 1. $(\widetilde{L}_{p,N},T)$为$((\widetilde{R}^N)_p^*,T)$的一个組变状收縮核.

証. 視积空間$\underbrace{R^N\times\cdots\times R^N}_{p}$为一$pN$維欧氏空間$R^{pN}$而命0为其原点, Δ^N为积空間的对角形,由以下綫性方程組所定义:

$$x_1=\cdots=x_p,\ (x_1,\cdots,x_p)\in R^{pN}.$$

对任意点$x\in\Delta^N$,命P_x为R^{pN}中过点x而与綫性子空間Δ^N完全垂直的$(p-1)N$維綫性子空間. 命$S_x^{(p-1)N-1}$为P_x中以x为中心的单位球而U为所有这样的球$S_x^{(p-1)N-1}$的和集, $x\in\Delta^N$. 显然对任意$x\in\Delta^N$有$T(S_x^{(p-1)N-1})\subset S_x^{(p-1)N-1}$因之$(S_x^{(p-1)N-1},T)$与$(U,T)$皆为$((\widetilde{R}^N)_p^*,T)$的子組. 易見$(S_0^{(p-1)N-1},T)$与$(\widetilde{L}_{p,N},T)$重合. 盖任与$S_0^{(p-1)N-1}$中一点$x==(x_1,\cdots,x_p)$, 此处$x_i\in R^N$时,有$\sum_{i=1}^{p}|x_i|^2=1$而对任意点$y=(e,\cdots,e)\in\Delta^N$, 此处$e\in R^N$, 有数积$x\cdot y=0$. 由此得对$x_1\cdot e+\cdots+x_p\cdot e=0$, 此处$e\in R^N$任意. 因之

$x_1 + \cdots + x_p = 0$，而 $x \in \tilde{L}_{p,N}$. 反之亦然. 因之 $\tilde{L}_{p,N} = S_0^{(p-1)N-1}$，而組 $(\tilde{L}_{p,N}, T)$ 与 $(S_0^{(p-1)N-1}, T)$ 相重合.

对任意点 $x \in (\tilde{R}^N)_p^*$ 命 $\pi(x)$ 为 x 在綫性子空間 Δ^N 上的正交投影. 命 $g(x)$ 为从 $\pi(x)$ 到 x 的半射綫与 $S_{\pi(x)}^{(p-1)N-1}$ 的交点. 将 x 沿联結 x 到 $g(x)$ 的綫段依綫性移动，可見組 (U,T) 为組 $((\tilde{R}^N)_p^*, T)$ 的一个組变状收縮核. 所有的球 $S_x^{(p-1)N-1}$ 在对应 $y \to y - x$ 之下与 $S_0^{(p-1)N-1}$ 同拓，此处 $y \in S_x^{(p-1)N-1}$，而 $x = \pi(y)$. 对所有 $x \in \Delta^N$，試将任意点 $y \in S_x^{(p-1)N-1}$ 沿联結 y 与 $y - x \in S_0^{(p-1)N-1}$ 的綫段依綫性移动,即得一(U,T)到$(S_0^{(p-1)N-1},T)$的組变状收縮. 合此两移动，即知 $(S_0^{(p-1)N-1}, T)$ 亦即 $(\tilde{L}_{p,N}, T)$ 为組 $((\tilde{R}^N)_p^*, T)$ 的一个組变状收縮核. 这証明了定理.

給出 $((\tilde{R}^N)_p^*, T)$ 到 $(\tilde{L}_{p,N}, T)$ 的組变状收縮的移动 F: $(\tilde{R}^N)_p^* \times I \to (\tilde{R}^N)_p^*$ 亦可明显地表示之如次. 对任意 $x = (x_1, \cdots, x_p) \in (\tilde{R}^N)_p^*$ 命 $0_x = 1/p\,(x_1 + \cdots + x_p)$. 于是 $\pi(x) = (0_x, \cdots, 0_x)$，而$g(x) = \pi(x) + \frac{1}{d_x} \cdot (x - \pi(x))$,此处 $d_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i - 0_x|^2}$ 为 x 与 $\pi(x)$ 在 R^{pN} 中的距离. 所求組变状收縮 F 即可表示如下:

$$F(x,t) = \begin{cases} \pi(x) + \left[2t\left(\frac{1}{d_x} - 1\right) + 1\right] \cdot (x - \pi(x)), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \pi(x) + \frac{1}{d_x} \cdot (x - \pi(x)) - (2t - 1) \cdot \pi(x), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

其中 $x \in (\tilde{R}^N)_p^*$.

因 $\tilde{L}_{p,N}$ 的維数 $= (p-1)N - 1$，故得以下:

推論 1. ${}^p\tilde{H}_{(p)}^r(R^N) = 0$, $r \geqslant (p-1)N$.

如[3]与[4]中所示,許多 Van Kampen, Whitney 与 Thom 关于实現的定理皆为 $p=2$ 情形下的上述推論的后果,在上述諸文中,并曾給出以上推論的其他証明.

在 $p = 2$ 时,映象 $(x_1, x_2) \to \sqrt{2}\ x_1$ 給出 $\tilde{L}_{2,N}$ 到 R^N 中单位球S^{N-1}上的一个拓扑映象且使 $\tilde{L}_{2N}$ 中的巡迴变換 T: $(x_1, x_2) \to (x_2, x_1)$ 轉变为 S^{N-1} 的对极映象 T_a. 因之易得

推論 2. ${}^p\tilde{H}_{(2)}^r(R^N) \approx {}^pH^r(S^{N-1}, T_a)$，同构关系由映象 j: $(\tilde{R}^N)_2^* \to S^{N-1}$ 所引出，此处 $j(x_1, x_2)$ 为过 R^N 原点而与自 x_1 至 x_2 方向平行的半射綫与 S^{N-1} 的交点.

命 $\overset{+}{R}{}^N$ 为具有某一确定定向的空間 R^N, 于是$((p-1)N-1)$維球 $\tilde{L}_{p,N}$ 亦有一确定定向,因之由 §1,决定了 ${}^{p(p-1)N}H^{(p-1)N-1}(\tilde{L}_{p,N}^+, T)$中一个确定的母素 ${}^{p(p-1)N}\Theta^{(p-1)N-1}(\tilde{L}_{p,N}^+, T)$，此处 $\tilde{L}_{p,N}^+$ 为具有如下定向的空間 $\tilde{L}_{p,N}$: 定向如 $\overset{+}{R}{}^N$ 的对角形 Δ^N 繼以定向的 $\tilde{L}_{p,N}^+$ 应給出积空間 $\underbrace{R^N \times \cdots \times R^N}_{p}$ 的定向,此处每一 R^N 都定向如 $\overset{+}{R}{}^N$. 記

$\tilde{i}: (\tilde{L}_{p,N}, T) \to ((\tilde{R}^N)_p^*, T)$ 为包含映象,则类

$$(i^*)^{-1}\, {}^{p(p-1)N}\Theta^{(p-1)N-1}(\tilde{L}_{p,N}^+, T) \in {}^{p(p-1)N}\tilde{H}_{(p)}^{(p-1)N-1}(R^N)$$

以后将記为

$${}^{p(p-1)N}\Theta_{(p)}^{(p-1)N-1}(\overset{+}{R}{}^N) \in {}^{p(p-1)N}\tilde{H}_{(p)}^{(p-1)N-1}(R^N).$$

注意若 R^N 的定向有改变，則 ${}^{p(p-1)N}\Theta_{(p)}^{(p-1)N-1}(\overset{+}{R}{}^N)$ 在 $p = 2$ 时改变記号,而在 $p > 2$ 时并无改变.

今定向 R^N 中的单位球 S^{N-1} 使与 R^N 的定向协合,则显有

$$ {}^{\rho_N}j^{*}\,{}^{\rho_N}\Theta_{(2)}^{N-1}(\overset{+}{S}{}^{N-1},T_{*}) = {}^{\rho_N}\Theta_{(2)}^{N-1}(\overset{+}{R}{}^{N}), $$

其中 j: $((\widetilde{R}^N)_2^*,T)\to(S^{N-1},T_*)$,即推論 2 中的映象. 而 $\overset{+}{S}{}^{N-1}$ 为与 $\overset{+}{R}{}^{N}$ 有协合定向的球 S^{N-1}.

§3. 一个空間在另一空間中的实現

一个空間 X 将称为是可以实現于另一空間 Y 中的, 如果有一 X 到 Y 中的連續映象使空間 X 与 $f(X)$ 在映象 f 下同拓. 两个 X 到 Y 中的实現 f,g 将称为是同痕的,如果有連續映象 F: $X\times I\to Y$ 使定义 F_t: $X\to Y$ 如 $F_t(x)=F(x,t),t\in I=[0,1],x\in X$ 时, 每一 F_t 是 X 到 Y 中的实現且 $F_0\equiv f,F_1\equiv g$. 此时映象 F 将称为 f,g 間(或从 f 到 g) 的一个同痕.

如果 f:$X\to Y$ 是一个实現, 則对每一質数 p, f 将引起一組映象 $\tilde{f}_p$: $(\widetilde{X}_p^*,T_X)\to(\widetilde{Y}_p^*,T_Y)$, 定义如

$$ \tilde{f}_p(x_1,\cdots,x_p)=(f(x_1),\cdots,f(x_p)),\ \ (x_1,\cdots,x_p)\in\widetilde{X}_p^*. $$

因之有一組准同构

$$ {}^{\rho}\tilde{f}_p^*:\ {}^{\rho}\widetilde{H}_{(p)}^r(Y)\to{}^{\rho}\widetilde{H}_{(p)}^r(X). $$

定理 2. 准同构 ${}^{\rho}\tilde{f}_p^*$ 为 X 到 Y 中的实現的同痕不变量,换言之,对任两 X 到 Y 中同痕的实現 f 与 g, ${}^{\rho}\tilde{f}_p^*$ 与 ${}^{\rho}\tilde{g}_p^*$ 重合.

証. 命 F: $X\times I\to Y$ 为两实現 f 与 g 間的一个同痕. 于是 $\widetilde{F}_p((x_1,\cdots,x_p),t)==(F(x,t),\cdots,F(x_p,t))$, 此处 $(x_1,\cdots,x_p)\in\widetilde{X}_p^*$, $t\in I$, 定义了組映象 $\tilde{f}_p$ 与 $\tilde{g}_p$ 間的一个組同伦. 故定理可从 §1 中的引定理 1 得出.

特别取 $Y=R^N$, 則根据 §2 中定理 1,可得上述定理 2 的諸推論如下:

定理 3. 若空間 X 能在一 N 維的欧氏空間 R^N 中实現,則必有

$$ {}^{\rho}\widetilde{H}_{(p)}^r(X)=0,\ r\geqslant(p-1)N. $$

定理 4. 上类 ${}^{\rho_{(p-1)N}}\Theta_{(p)}^{(p-1)N-1}(X,f)={}^{\rho_{(p-1)N}}\tilde{f}_p^*\,{}^{\rho_{(p-1)N}}\Theta_{(p)}^{(p-1)N-1}(\overset{+}{R}{}^{N})$ 为 X 到 R^N 中实現 f 的同痕不变量,即对任两 X 到 R^N 中的同痕的实現 f 与 g, 有

$$ {}^{\rho_{(p-1)N}}\Theta_{(p)}^{(p-1)N-1}(X,f)={}^{\rho_{(p-1)N}}\Theta_{(p)}^{(p-1)N-1}(X,g), $$

其中 $\overset{+}{R}{}^{N}$ 为具有一确定定向的欧氏空間 R^N.

定义. 若 f 为空間 X 到 R^N 中的一个实現,則上类

$$ {}^{\rho_{(p-1)N}}\Theta_{(p)}^{(p-1)N-1}(X,f)={}^{\rho_{(p-1)N}}\tilde{f}_p^*\,{}^{\rho_{(p-1)N}}\Theta_{(p)}^{(p-1)N-1}(\overset{+}{R}{}^{N}) $$

将称为 X 到 R^N 中的实現 f 对 R^N 所与定向而言的同痕类.

附注. 在 $p=2$ 时,我們也将使用記号

$$ {}^{\rho_N}\Theta_{(2)}^{N-1}(X,f)={}^{\rho_N}\Theta_f^{N-1}(X). $$

§4. 复合形的綫性实現与綫性同痕

命 K 为一有限的单純复合形,視作某一維数充分高的欧氏空間中的一个欧氏复合形. K 的空間将記作 $|K|$. K 中 p 个单純形 $(\sigma_1,\cdots,\sigma_p)$ 所成的組将称为非对角性的,如果沒

有一个K的頂点属于所有这p个单純形，虽然这些单純形中的少于p个可能有公共的頂点. 对每一p可作K的一个p重約化积$\tilde{K}_p^*$，由p重积复合形$\underbrace{K\times\cdots\times K}_{p}$中的一切胞腔$\sigma_1\times\cdots\times\sigma_p$所組成，此处$(\sigma_1,\cdots,\sigma_p)$是一个非对角性組. 在$|\tilde{K}|_p^*$中的巡迴变换$T_{|K|}$将引起一$\tilde{K}_p^*$中的胞腔映象$T_K$，由下式所定：

$$T_K(\sigma_1\times\cdots\times\sigma_p)=(-1)^{\dim\sigma_1(\dim\sigma_2+\cdots+\dim\sigma_p)}\sigma_2\times\cdots\times\sigma_p\times\sigma_1.$$

对一質数p而言我們将置

$$^{\rho}H^r(\tilde{K}_p^*,T_K)={}^{\rho}\tilde{H}^r_{(p)}(K).$$

以下定理曾在[3]中給出：

定理 5. 設p为一質数. 則簡单組$(|\tilde{K}_p^*|,T_{|K|})$为簡单組$(|\tilde{K}|_p^*,T_{|K|})$的一个組变状收縮核，因之有确定的同构

$$^{\rho}\gamma_p^*:\ {}^{\rho}\tilde{H}^r_{(p)}(|K|)\approx{}^{\rho}\tilde{H}^r_{(p)}(K).$$

对任一$|K|$在一定向R^N中的实現f我們将置

$$^{\rho}\gamma_p^*\ {}^{\rho_{(p-1)N}}\Theta_{(p)}^{(p-1)N-1}(|K|,f)={}^{\rho_{(p-1)N}}\Theta_{(p)}^{(p-1)N-1}(K,f),$$

而在$p=2$时，也使用記号

$$^{\rho_N}\Theta_{(2)}^{N-1}(K,f)={}^{\rho_N}\Theta_f^{N-1}(K).$$

定义. 上类

$$^{\rho_{(p-1)N}}\Theta_{(p)}^{(p-1)N-1}(K,f)\in{}^{\rho_{(p-1)N}}\tilde{H}_{(p)}^{(p-1)N-1}(K)$$

将称为复合形K在定向R^N中实現f的**同痕类**.

一个$|K|$到R^N中的連續映象f将称为复合形K到R^N中的一个**綫性映象**，如果$f/|\sigma|$对K的每一单純形σ而言都是綫性的. 一个$|K|$到R^N中的实現f也将称为一个复合形K到R^N中的**綫性实現**，如果f也是K到R^N中的一个綫性映象. 所有$|K|$到R^N的連續映象所成的集合$C_N(|K|)$在下述通常的度量之下成一度量空間：

$$d(f,g)=\max_{x\in|K|}d(f(x),g(x)),\quad f,g\in C_N(|K|),$$

此处$d(y,z)$指点$y,z\in R^N$間的距离. 記$C_N(|K|)$中所有綫性映象（或綫性实現）所成的子空間为$L_N(K)$（或$I_N(K)$）. 易見对$f,g\in L_N(K)$，$d(f,g)$等于对一切K的頂点a而言，諸距离$d(f(a),g(a))$中之最大者.

設已与$f\in I_N(K)$. 对K中任一对非对角性的单純形σ,τ命$\delta_{\sigma,\tau}>0$为点集$f(|\sigma|)$与$f(|\tau|)$間的距离，即一切距离$d(x,y)$的最小值，此处$x\in f(|\sigma|)$，$y\in f(|\tau|)$. 这些数$\delta_{\sigma,\tau}$中的最小者也>0而将記之为δ_f.

定理 6. 集合$I_N(K)$在空間$L_N(K)$中是开的.

証. 若$I_N(K)$是空集，則不需任何証明. 相反假設$f\in I_N(K)$是K到R^N中的一个綫性实現. 試考使$d(f,g)<\frac{1}{2}\delta_f$的任意$K$到$R^N$中的綫性映象$g\in L_N(K)$. 我們将証$g\in I_N(K)$.

为此，先注意对K中任一对非对角性的单純形σ,τ而言，点集$g(|\sigma|)$与$g(|\tau|)$必不相遇. 盖对任意点$x\in|\sigma|$，$y\in|\tau|$，有$d(g(x),g(y))\geqslant d(f(x),f(y))-d(f(x),g(x))-d(f(y),g(y))\geqslant\delta_f-2d(f,g)>0$. 由此知对每一$\sigma\in K$，$g/\sigma$为一不退化的綫性映象.

因之若对 $x \neq y \in |K|$ 有 $g(x) = g(y)$，则 x, y 将分别在具有公共頂点的两不同单純形 $\sigma \neq \tau$ 的內部. 命 0 为 σ, τ 的一个公共頂点，而以 σ', τ' 为其相对的面. 从 $g(0)$ 至 $g(x) = g(y)$ 的半射綫 l 将与 $g(|\sigma'|)$以及 $g(|\tau'|)$相遇. 假設 l 先与 $g(|\sigma'|)$相遇于点 z（或与 $g(|\sigma'|), g(|\tau'|)$ 同遇于点 z），则 $x_1 = g^{-1}(z) \cap |\sigma|$ 与 $y_1 = g^{-1}(z) \cap |\tau|$ 具有性质 $x_1 \neq y_1, x_1 \in |\sigma'|, y_1 \in |\tau|$ 而 $g(x_1) = g(y_1)$. 点偶 (x, y) 因之可易以点偶 (x_1, y_1)，后者各位于单純形的內部，其維数之和較前为小. 依此进行最后卽可得一点偶 $x_r \neq y_r \in |K|$，各在一对 K 的非对角性单純形的內部. 但前已指出这是不可能的. 因之 $x \neq y \in |K|$ 蘊含 $g(x) \neq g(y)$ 而有 $g \in I_N(K)$，如所欲証.

K 到 R^N 中的两个綫性实現 f, g 将称为**綫性同痕**的，如果有一 f, g 的同痕 F 存在，此处 F 为积复合形 $M = K \times I$ 的某一单純剖分 M' 到 R^N 中的綫性映象. 显然綫性同痕为一等价关系，同样也显然 F 与 $K \times I$ 的剖分可如此选择，使其以 $K \times (0)$ 与 $K \times (1)$ 为子复合形.

定理 7. 若 f 为 K 到 R^N 中的一个綫性实現，則任意与 f 充分接近的綫性实現 g（明确言之 $d(f,g) < \frac{1}{2}\delta_f$）必与 f 綫性同痕.

証. 据定理 6 的証明可知对任意使 $d(f,g) < \frac{1}{2}\delta_f$ 的任意 $g \in L_N(K)$ 必有 $g \in I_N(K)$. 試考任一这样使 $d(f,g) < \frac{1}{2}\delta_f$ 的綫性实現 $g \in I_N(K)$. 我們将証 g 与 f 綫性同痕. 为此，命 K 的頂点为 $a_1, \cdots, a_r$. 定义 f_i: $|K| \to R^N$ 为一綫性映象使 $f_i(a_j) = g(a_j)$, $j \leqslant$ 时，而 $f_i(a_j) = f(a_j)$, $j > i$ 时. 則显有 $d(f, f_i) < \frac{1}{2}\delta_f$，因而諸 f_i 都是 K 到 R^N 中的綫性实現. 今定义 F_i: $|K| \times I \to R^N$ 如下. 取一 $K \times I$ 的单純映象 K'_i 使其頂点为$(a_j) \times (0), (a_j) \times (1)$（一切 j）与 $(a_k) \times \left(\frac{1}{2}\right)$（一切 $k \neq i$），但此外不再有其他頂点. 于是 F_i 为 K' 到 R^N 中如下所定的綫性映象:

$$F_i\left((a_j) \times \left(\frac{1}{2}\right)\right) = F_i((a_j) \times (0)) = F_i((a_j) \times (1)) = f_i(a_j), j \neq i,$$

而 $(f_0 = f)$,

$$F_i((a_i) \times (0)) = f_{i-1}(a_i), F_i((a_i) \times (1)) = f_i(a_i).$$

易見 F_i 为 f_{i-1} 与 f_i 間的一个綫性同痕而諸 $F_1, \cdots, F_r$ 給出了一个 f 与 g 間的綫性同痕，如所欲証.

定理 8. 命 F 为 K 到 R^N 中两个綫性实現 f 与 g 間的一个綫性同痕，因而 F 是 $M = K \times I$ 的某一单純剖分 M' 到 R^N 中的一个綫性映象，于是任一与 F 在 $L_N(M')$ 的拓扑中充分接近的 M' 到 R^N 中的綫性映象 F' 也是一个綫性实現 f' 与 g' 間的綫性同痕，此处 $f'(x) = F'(x, 0)$, $g'(x) = F'(x, 1)$, $x \in |K|$.

証. 設 π 为 $|M|$ 到 I 上的投影. 对任意 M' 的点 x 将置 $t_x = \pi(x)$. 今定义一 $|M|$ 到 $R^{N+1} = R^N \times L$ 中的映象 $\bar{F}$ 为 $\bar{F}(x) = (F(x), t_x)$, $x \in |M|$，此处 L 为直綫 $-\infty < t < +\infty$. 因 F 是 M' 到 R^N 中的一个綫性映象，故 $\bar{F}$ 显为一 M' 到 R^{N+1} 中的綫性映象. 又因 F 是一个到 R^N 中的同痕，故 $\bar{F}$ 是一个到 R^{N+1} 中的**綫性实**現. 取定

$\delta = \delta_{\bar{F}} > 0$ 使任意満足 $d(\bar{F},\bar{F}') < \frac{1}{2}\delta$ 的 M' 到 R^{N+1} 中的綫性映象必是 M' 到 R^{N+1} 中的綫性实現. 今考虑任意使 $d(F,F') < \frac{1}{2}\delta$ 的 M' 到 R^N 中的綫性映象 F'. 定义 $\bar{F}'$: $|M'| \to R^{N+1}$ 为 $\bar{F}'(x) = (F'(x), t_x), x \in |M'|$. 則有

$$d(\bar{F},\bar{F}') = \max_{x\in|M'|} d(\bar{F}(x),\bar{F}'(x)) = \max_{x\in|M'|} d((F(x),t_x),(F'(x),t_x)) =$$

$$= \max_{x\in|M'|} d(F(x),F'(x)) = d(F,F') < \frac{1}{2}\delta.$$

因之 $\bar{F}'$ 为一 M' 到 R^{N+1} 中的綫性实現. 由此卽得 F' 为 f',g' 間的一个綫性同痕而定理得証.

§5. 綫性实現的正規偶

如前設 K 是一个維数充分高欧氏空間中的有限单純复合形. 两个 K 到 R^N 中的綫性实現（或綫性映象）f, g 对于 K 中一对非对角性的单純形 σ, τ 将称为正規的，如果 (i) $f(|\sigma|)$ 与 $f(|\tau|)$ 不相遇，$g(|\sigma|)$ 与 $g(|\tau|)$ 亦然，又 (ii) 对任意点 $x \in |\dot{\sigma}|, y \in |\dot{\tau}|$，联結 $g(x)$ 与 $g(y)$ 的直綫不与联結 $f(x), f(y)$ 的直綫平行. K 到 R^N 中的两个綫性实現（或綫性映象）f, g 将称为对 K 是正規的，如果它們对 K 中任意一对使 $\dim\sigma + \dim\tau \leqslant N-2$ 的非对角性单純形 σ, τ 而言都是正規的.

引理 1. 若 (f,g) 是有限单純复合形 K 到 R^N 中的一对正規的綫性实現（或綫性映象），則在 $L_N(K)$ 的拓扑中任意一对与 f,g 充分接近的綫性实現（或綫性映象）也是正規的.

証. 此由定义直接得知.

引理 2. 設 K 为由两不相遇单純形 $\sigma = (a_0\cdots a_p), \tau = (b_0\cdots b_q)$ 以及其面所成的复合形. 設 f,g 为 K 到 R^N 中的两个綫性实現（或綫性映象），此处 R^N 的維数 $N \geqslant p+q+2$. 若 f, g 对不相遇单純形 σ 与 $\xi = (b_1\cdots b_q)$ 而言是正規的，則在 $f(b_0)$ 的任意近傍必有点 b_0' 存在使定义一 K 到 R^N 中的綫性实現（或綫性映象）f' 如 $f'(a_i) = f(a_i), f'(b_j) = f(b_j)$，$j \neq 0$ 而 $f'(b_0) = b_0'$ 时，f,g 对 (σ,τ) 而言是正規的.

証. 由假設 $g(|\sigma|)$ 与 $g(|\xi|)$ 不相遇. 因 $N \geqslant p+q+2$，故无損于普遍性而不妨假定，至多对 $g(b_0)$ 作一微小移动，$g(|\sigma|)$ 与 $g(|\tau|)$ 也不相遇. 对 $x\in|\sigma|, y\in|\tau|$ 命 $L_{x,y}$ 为过 $f(x)$ 而平行于 $g(x)$ 与 $g(y)$ 联綫的直綫. 已与 $x\in|\sigma|, z\in|\xi|, 1\geqslant\mu>0$，命 $M_{x,z,\mu}$ 为满足 $\mu u + (1-\mu)f(z) \in L_{x,y}$ 的一切点 $u \in R^N$ 所成点集，此处 $y = \mu b_0 + (1-\mu)z$. 于是 $M_{x,z,\mu}$ 为有实数 c 存在使

$$\mu u + (1-\mu)f(z) - f(x) = c[g(y) - g(x)]$$

或

$$u = \frac{c}{\mu}[\mu g(b_0) + (1-u)g(z) - g(x)] - \frac{1}{\mu}[(1-\mu)f(z) - f(x)]$$

的一切点 u 所成的点集. 一切 $M_{x,z,\mu}$ 的和集 M 易見为一維数 $\leqslant p+q+1 < N$ 的点集. 因之任意接近于 $g(b_0)$ 可取 $b_0' \notin M$ 且使 f 为一綫性实現时，由 $f'(a_i) = f(a_i), f'(b_j) = f(b_j)$，$j \neq 0$ 而 $f'(b_0) = b_0'$ 所定义的綫性映象 f' 也是一个綫性实現. 若 f', g 对 σ, τ 而言非正規的，則将有 $x\in|\sigma|, y\in|\tau|$ 使联結 $f'(x) = f(x)$ 与 $f'(y)$ 的直綫平行于联結 $g(x)$ 与 $g(y)$

的直綫，或即 $f'(y) \in L_{x,y}$. 由假設 f,g 因之 f',g 对 σ, ξ 是正規的，因之 $y \notin |\xi|$. 故有 $z \in |\xi|$ 与 μ 使 $1 \geqslant \mu > 0$ 而 $y = \mu b_0 + (1-\mu)z$. 于是将有 $f'(y) = \mu b_0' + (1-\mu)f(z), \in L_{x,y}$ 或 $b_0' \in M_{x,z,\mu} \subset M$，此不可能. 故 f',g 对 σ,τ 而言是正規的，如所欲証.

定理 9. 在 $L_N(K)$ 的拓扑中，任意接近于两个 K 到 R^N 中的綫性实現必有 K 到 R^N 中正規的綫性实現 f',g' 存在，且 f',g' 各与 f,g 綫性同痕.

証. 設 $\varepsilon>0$ 已給. 設 $\delta>0$ 具有下述性質：对任意 $f',g' \in L_N(K)$，祇須 $d(f,f') < \delta$, $d(g,g') < \delta$，即有 $f',g' \in I_N(K)$ 且 f',g' 各与 f,g 綫性同痕，例如 $\delta = \min\left(\frac{1}{2}\delta_f, \frac{1}{2}\delta_g\right)$（見 § 4 的定理 6、7）. 今将 K 中单純形排成次序

$$\sigma_0 \prec \sigma_1 \prec \cdots \prec \sigma_r,$$

使維数低者在前，此外任意. 設 K_i 为由 K 的单純形 $\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_i$ $(i \leqslant r)$ 所成的子复合形. 今依次定义 K 到 R^N 中的綫性映象 f_i 使 $d(f_{i-1},f_i) < \min\left(\frac{1}{r}\delta, \frac{1}{r}\varepsilon\right)$，而 f_i,g 对 K_i 而言为正規的如次. 取 $f_0=f$，此处 f_0 与 g 对 $K_0=(\sigma_0)$ 而言自然是正規的. 假設 $f_0,f_1,\cdots,f_{i-1}$ 已定义而满足所要求的条件. 命 a_i 为 σ_i 的任一頂点. 由前面的引理可在 R^N 中取一点 a_i' 使 $d(a_i,a_i') < \min\left(\frac{1}{r}\delta, \frac{1}{r}\varepsilon\right)$，且使定义 K 到 R^N 中的綫性映象为 $f_i(a_i) = a_i'$ 但对其他頂点 a 有 $f_i(a) = f_{i-1}(a)$ 时，f_i,g 对 K_i 而言是正規的. 継續进行最后可得一映象 $f' = f_r$ 使 f',g 对 $K_r = K$ 而言是正規的且 $d(f,f') \leqslant \sum_{i=1}^{r} d(f_{i-1},f_i) < \min(\delta,\varepsilon)$. 于是 f' 与 $g' = g$ 即满足定理的要求.

附注. 从証明可知定理仍然眞实，如果在其中易綫性实現为綫性映象，只須在此两映象下的 K 中一切頂点的象都在一般位置.

§ 6. 一对綫性实現的同痕类

命 R^{N+1} 为积空間 $R^N \times L$，此处 L 为一直綫 $-\infty < t < +\infty$. 子空間 $R^N \times (t)$ 将記为 R_t^N. 对任意空間 X 与任两 X 到 R^N 中的連續映象 f,g 定义 $F: X \times L \to R^{N+1}$ 使 $F(X \times (t)) \subset R_t^N$, $F(x,0) = (f(x),0)$, $F(x,1) = (g(x),1)$ 而 F 映 $(x) \times L$ 为連結 $F(x,0)$ 与 $F(x,1)$ 的直綫，此处 $x \in X$. 此映象 F 将称为由 f,g 所协定的.

今設 R^N 已定向而 R^{N+1} 定向如积空間 $R^N \times L$，此处 L 依 t 的增加定向. 設 K 是一有限单純复合形如前，而 f,g 是 K 到 R^N 中对 K 而言是正規的两个綫性实現. 于是对协定映象 $F: |K| \times L \to R^{N+1}$ 而言点集 $F(|\xi| \times L)$ 与 $F(|\eta| \times L)$ 不相遇，此处 $\xi \times \eta$ 是二重約化复合形 $\widetilde{K}_{(2)}^* = \widetilde{K}^*$ 的任意 $N-2$ 維胞腔 $\xi \times \eta$. 盖設不然，将有点 $x \in |\xi|, y \in |\eta|$ 使 $F((x) \times L)$ 与 $F((y) \times L)$ 彼此相交. 于是联結 $F((x) \times (0))$ 与 $F((y) \times (0))$ 的直綫将与联結 $F((x) \times (1))$ 与 $F((y) \times (1))$ 的直綫平行，因而联結 $f(x)$ 与 $f(y)$ 的直綫将与联結 $g(x)$ 与 $g(y)$ 的直綫平行，与 f,g 的正規性假設相違. 由此知对 $\widetilde{K}^*$ 的任意 $N-1$ 維胞腔 $\sigma \times \tau$，点集 $|\partial F(\sigma \times I)|$ 与 $|F(\tau \times I)|$ 是不相遇的，点集 $|F(\sigma \times I)|$ 与 $|\partial F(\tau \times I)|$ 也是不相遇的. 于是对 R^{N+1} 的上述定向而言，作为 R^{N+1} 中两个奇异鏈的 $F(\sigma \times I)$ 与 $F(\tau \times I)$，有明确的相交指数. 因之可定义一复合形 $\widetilde{K}^*$ 中的 $N-1$ 維上鏈 $\theta_{f,g}^{N-1}$ 如下:

$$\theta_{f,g}^{N-1}(\sigma\times\tau)=\phi(F(\sigma\times I),F(\tau\times I)),\tag{1}$$

此处 $\sigma\times\tau$ 为 $\widetilde{K}^*$ 中任意 $N-1$ 維胞腔，而記号 ϕ 表定向 R^{N+1} 中的相交指数．命 T_K 如前为 $\widetilde{K}^*$ 中的下述胞腔映象：

$$T_K(\sigma\times\tau)=(-1)^{\dim\sigma\dim\tau}\tau\times\sigma,\ \sigma\times\tau\in\widetilde{K}^*,$$

而 ρ_N 为运算子

$$\rho_N=1+(-1)^{N-1}T_K.$$

于是对 $\widetilde{K}^*$ 中任意 $N-1$ 維胞腔 $\sigma\times\tau$，有

$$\begin{aligned}\rho_N\,\theta_{f,g}^{N-1}(\sigma\times\tau)&=\theta_{f,g}^{N-1}\rho_N(\sigma\times\tau)=\\&=\theta_{f,g}^{N-1}(\sigma\times\tau)+(-1)^{N-1+\dim\sigma\dim\tau}\theta_{f,g}^{N-1}(\tau\times\sigma)=\\&=\phi(F(\sigma\times I),F(\tau\times I))+(-1)^{N-1+\dim\sigma\dim\tau}\phi(F(\tau\times I),F(\sigma\times I))=\\&=(-1)^{(\dim\sigma+1)(\dim\tau+1)}\cdot\phi(F(\tau\times I),F(\sigma\times I))+\\&\quad+(-1)^{N-1+\dim\sigma\dim\tau}\cdot\phi(F(\tau\times I),F(\sigma\times I))=0,\end{aligned}$$

最后等号由于 $\dim\sigma+\dim\tau=N-1$．再者，对任意 N 維胞腔 $\xi\times\eta\in\widetilde{K}^*$ 有

$$\begin{aligned}\delta\,\theta_{f,g}^{N-1}(\xi\times\eta)&=\theta_{f,g}^{N-1}(\partial\xi\times\eta)+(-1)^{\dim\xi}\theta_{f,g}^{N-1}(\xi\times\partial\eta)=\\&=\phi(F(\partial\xi\times I),F(\eta\times I))+(-1)^{\dim\xi}\cdot\phi(F(\xi\times I),F(\partial\eta\times I)).\end{aligned}$$

因 f,g 皆为綫性实現，故 $|F(\xi\times\partial I)|$ 与 $|F(\eta\times I)|$ 不相遇，同样 $|F(\xi\times I)|$ 与 $|F(\eta\times\partial I)|$ 也不相遇．故最后的等式可簡化为

$$\delta\,\theta_{f,g}^{N-1}(\xi\times\eta)=\phi(\partial F(\xi\times I),F(\eta\times I))+(-1)^{\dim\xi}\cdot\phi(F(\xi\times I),\partial F(\eta\times I))=0.\tag{2}$$

由此知 $\theta_{f,g}^{N-1}$ 为 $\widetilde{K}^*$ 中的一个 ρ_N- 上閉鏈，我們将称之为正規綫性实現偶 f,g 的同痕上閉鏈．$\theta_{f,g}^{N-1}$ 的 ρ_N- 上同調类将称为正規偶 f,g 的同痕类而将記之为 ${}^{\rho_N}\Theta_{f,g}^{N-1}(K)\in{}^{\rho_N}\widetilde{H}_{(2)}^{N-1}(K)$．

附注．即使 (f,g) 只是一个正規的綫性映象偶，只須对任意 $\widetilde{K}^*$ 中的 $N-1$ 維胞腔 $\sigma\times\tau$，$f(|\sigma|)$ 与 $f(|\tau|)$ 不相遇，而 $g(|\sigma|)$ 与 $g(|\tau|)$ 亦然，則 ρ_N- 上閉鏈 $\theta_{f,g}^{N-1}$ 仍可由(1)所完滿地定义．所有論証中唯一須改动之处为 $\delta\,\theta_{f,g}^{N-1}=0$ 的証明．事实上，对任意 N 維胞腔 $\xi\times\eta\in\widetilde{K}^*$，容易驗得

$$\phi(F(\xi\times\partial I),F(\eta\times I))=\phi'(g(\xi),g(\eta))-\phi'(f(\xi),f(\eta)),$$

与

$$\phi(F(\xi\times I),F(\eta\times\partial I))=(-1)^{\dim\eta+1}\cdot[\phi'(g(\xi),g(\eta))-\phi'(f(\xi),f(\eta))],$$

此处 ϕ' 表定向 R^N 中的相交指数．由此知(2)仍然眞确．

由 §5 的定理 2，任意接近于 K 到 R^N 中的綫性实現 f,g，都有 K 到 R^N 中的正規綫性实現 f' 与 g' 存在，各与 f,g 綫性同痕．对于上类 ${}^{\rho_N}\Theta_{f',g'}^{N-1}(K)$ 我們有

定理 10. 設 f,g 是 K 到 R^N 中的一对綫性实現．則对 K 到 R^N 中任意各与 f,g 綫性同痕的正規綫性实現 f',g' 而言，同痕类 ${}^{\rho_N}\Theta_{f',g'}^{N-1}(K)$ 与所择正規偶 f',g' 无关．

証．先注意若 (f',g') 与 (f'',g'') 是 K 到 R^N 中两对正則的綫性实現，使 f',f'' 同样 g',g'' 在 $L_N(K)$ 的拓扑中各充分接近，則有 ${}^{\rho_N}\Theta_{f',g'}^{N-1}(K)={}^{\rho_N}\Theta_{f'',g''}^{N-1}(K)$．盖設 $F':|K|\times I\to R^{N+1}$ 与 $F'':|K|\times I\to R^{N+1}$ 为这两正則偶的协合映象，并如前定义

$$\theta_{f',g'}^{N-1}(\sigma\times\tau)=\phi(F'(\sigma\times I),F'(\tau\times I)),$$

$$\theta_{f'',g''}^{N-1}(\sigma\times\tau)=\phi(F''(\sigma\times I),F''(\tau\times I)),$$

此处 $\sigma\times\tau$ 为 $\widetilde{K}^*$ 的任意 $N-1$ 維胞腔．則只須 (f'',g'') 与 (f',g') 充分接近因而 F',F'' 在 $C_{N+1}(|K|\times I)$ 的拓扑中充分接近时，即有

$$\phi(F'(\sigma \times I), F'(\tau \times I)) = \phi(F''(\sigma \times I), F''(\tau \times I)),$$

因而 $\theta^{N-1}_{f',g'} = \theta^{N-1}_{f'',g''}$ 或即 ${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f',g'}(K) = {}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f'',g''}(K)$.

今設 $J = [0,1]$ 而 $M = K \times J$. 設 (f',g') 与 (f'',g'') 为K到R^N中的两个綫性实現的正規偶,各与f,g綫性同痕. 至多使用微小移动,我們不妨假定K在f',g',f'',g''下的所有頂点的象点都在一般位置(見开首注意). 因f'与g'各与f'',g''綫性同痕,故有M的单純剖分M'_f与M'_g,以$K \times (0)$与$K \times (1)$为子复合形,以及M'_f与M'_g到R^N中的綫性同痕映象h_f, h_g使

$$h_f(x,0) = f'(x),\ h_f(x,1) = f''(x),$$
$$h_g(x,0) = g'(x),\ h_g(x,1) = g'(x),$$

此处 $x \in |K|$ 任意. 必要时取公共剖分,故不妨假定M'_f与M'_g重合,而記之为M'. 今将在M'中但不在$K \times (0)$或$K \times (1)$中的頂点略作移动使其处于一般位置. 于是逐次应用§5中的引理2可将h_f与h_g移动为一对正規的綫性映象,仍記之为h_f与h_g($K \times (0)$与$K \times (1)$中的頂点将保持不变),参閱§5末的附註. 由§4的定理8,只須移动充分小,最后所得綫性映象h_f与h_g仍将为(f',f'')与(g',g'')間的綫性同痕. 命$j_i: K \to M'$为单純映象,定义如$j_i(a) = (a,i)$, $i = 0$或1,而a为K的任意頂点. 設$\tilde{j}_i: \tilde{K}^* \to \tilde{M}'^* = \tilde{M}'^*_{(2)}$为由$j_i$所引出的胞腔映象. 命$|J|: |K| \times I \to |M| = |K| \times J$为映象$|J|(x,t) = (x,t)$, $x \in |K|$, $t \in I$, 而$|\tilde{J}|: |\tilde{K}|^* \times I \to |\tilde{M}|^*$为由$|J|$所引出的映象,又命$|\tilde{j}_i|: |\tilde{K}|^* \to |\tilde{M}|^*$为由$|\tilde{j}_i|(z) = |\tilde{J}|(z,i)$, $i = 0,1$所定的映象. 于是$|\tilde{J}|$給出一个从組$(|\tilde{K}|^*, T_{|K|})$到組$(|\tilde{M}|^*, T_{|M|})$的两組映象$|\tilde{j}_0|$与$|\tilde{j}_1|$之間的組同伦,因之由§1的引定理1,它們引出特殊上同調羣間的准同构是恆同的: ${}^{\rho}|\tilde{j}_0|^* = {}^{\rho}|\tilde{j}_1|^*$. 因为$(\tilde{K}^*, T_K)$与$(|\tilde{K}|^*, T_{|K|})$的特殊上同調羣是依确定方式同构的,同样$(\tilde{M}'^*, T_{M'})$与$(|\tilde{M}'|^*, T_{|M'|})$亦然,故有${}^{\rho}\tilde{j}_0^* = {}^{\rho}\tilde{j}_1^*$. 今$\rho_N$-上閉鏈$\theta^{N-1}_{h_f,h_g} \in {}^{\rho_N}Z^{N-1}(\tilde{M}'^*)$有完滿的定义(参閱前面的附註). 逕由定义可得

$$\tilde{j}_0^{\#}\theta^{N-1}_{h_f,h_g} = \theta^{N-1}_{f',g'},\ \tilde{j}_1^{\#}\theta^{N-1}_{h_f,h_g} = \theta^{N-1}_{f'',g''}.$$

因 ${}^{\rho}\tilde{j}_0^* = {}^{\rho}\tilde{j}_1^*$, 故得 $\theta^{N-1}_{f',g'} \tilde{\rho}_N \theta^{N-1}_{f'',g''}$, 或 ${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f',g'}(K) = {}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f'',g''}(K)$. 这証明了定理.

从上述定理可見下面的定义是合理的:

定义. 設f,g是有限单純复合形K到定向R^N中的任一对綫性实現. 則任意与f,g綫性同痕的一对正規的綫性实現f',g'的同痕类${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f',g'}(K) \in {}^{\rho_N}\tilde{H}^{N-1}_{(2)}(K)$将簡称为$f,g$的**一个同痕类**而将記之为${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f,g}(K) \in {}^{\rho_N}\tilde{H}^{N-1}_{(2)}(K)$.

由于上面的定义,定理10可稍为加強而得下述

定理 10′. 設(f,g)与(f',g')是两对K到R^N中的綫性实現而f'与f綫性同痕,又g'与g綫性同痕. 則有

$${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f,g}(K) = {}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f',g'}(K).$$

下面的定理11指出${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f,g}(K)$可給出$K$到$R^N$中两个綫性实現$f,g$綫性同痕的必要条件. 在后面可以看到(§8的定理14),如果所考慮的是綫性实現的綫性同痕,那么这些必要条件将比由同痕类${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f}(K)$所給出的必要条件为強.

定理 11. 若一个有限单純复合形K到一欧氏空間R^N中的两个綫性实現f,g是綫性同痕的,則${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f,g} = 0$.

証. 因綫性实現 (g,g) 各与綫性实現 (f,g) 綫性同痕，故由定理 10′，${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f,g}(K)=$ $={}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{g,g}(K)$. 因之只須証明 ${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{g,g}(K)=0$. 今由 §5 的定理 9，有 K 到 R^N 中与 g 充分接近的正規的綫性实現 g', g'' 存在. 命 $G\colon |K|\times I\to R^{N+1}$ 与 $G'\colon |K|\times I\to R^{N+1}$ 各为 (g,g) 与 (g',g'') 的协定映象. 于是显然，若取 g', g'' 与 g 充分接近时，对任意 $\widetilde{K}^*$ 的 $N-1$ 維胞腔 $\sigma\times\tau$，应有

$$\phi(G'(\sigma\times I),G'(\tau\times I))=\phi(G(\sigma\times I),G(\tau\times I))$$

因上式右边显然为 0，故对 $\widetilde{K}^*$ 的任意 $N-1$ 維胞腔 $\sigma\times\tau$ 有

$$\theta^{N-1}_{g',g''}(\sigma\times\tau)=\phi(G'(\sigma\times I),G'(\tau\times I))=0.$$

故 $\theta^{N-1}_{g',g''}=0$ 或 ${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{g',g''}(K)=0$. 由定义即得 ${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{g,g}(K)=0$，而定理得証.

§7. ${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f,g}(K)$ 的又一定义与它們的若干性質

設 f,g 是有限单純复合形 K 在一定向 R^N 中的两个綫性实現. 某一 $M=K\times I$ 的单純剖分 M' 到 $R^{N+1}=R^N\times L$ 中的綫性映象 F 將称为 f,g 的一个**联接映象**，如果 $F(x,0)=$ $=(f(x),0)$, $F(x,1)=(g(x),1)$, $F(x,t)\in R^N_t$，此处 $x\in|K|$, $t\in I$. 这个映象將称为**精致的**，如果对 $\widetilde{K}^*$ 中的每一 $N-2$ 維胞腔 $\xi\times\eta$，奇异鏈 $F(\xi\times I)$ 与 $F(\eta\times I)$ 的点集不相遇，此处 $F(\xi\times I)$（同样 $F(\eta\times I)$）指奇异鏈 $FSd(\xi\times I)$，Sd 为从 M 到 M' 的剖分. 易見任一对 f,g 都存在着精致的联接映象. 对于 $\widetilde{K}^*$ 的任一 $N-1$ 維胞腔 $\sigma\times\tau$，奇异鏈 $F(\sigma\times I)$ 与 $F(\tau\times I)$ 对于如前所定的定向 R^{N+1} 于是有完滿定义的相交指数，因而可得一上鏈 $\theta^{N-1}_F\in C^{N-1}(\widetilde{K}^*)$ 定义如

$$\theta^{N-1}_F(\sigma\times\tau)=\phi(F(\sigma\times I),F(\tau\times I)).\qquad(1)$$

与前同样，可証 θ^{N-1}_F 为一 $\widetilde{K}^*$ 的 ρ_N- 上閉鏈.

定理 12. 对于有限单純复合形 K 到一定向 R^N 中任两綫性实現 f,g 的任意精致的联接映象 F，其所定 ρ_N- 上閉鏈 θ^{N-1}_F 的 ρ_N- 上同調类与所择精致联接映象 F 无关，而与 f,g 的同痕类 ${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f,g}(K)$ 重合.

証. 設 F_0,F_1 是 f,g 的两个精致的联接映象，都視作 $M=K\times I$ 某同一单純剖分 M' 到 R^{N+1} 中的綫性映象，而 M'' 則为积复合形 $K\times J$ 的某一单純剖分，以 $K\times(0)$ 与 $K\times(1)$ 为子复合形，$\widetilde{M}$ 为积复合形 $M''\times I$ 的某一单純剖分，同时也是 $M'\times J$（此处 $K\times I\times J$ 与 $K\times J\times I$ 恆同为一）的一个单純剖分. 設 H 是 $\widetilde{M}$ 到 R^{N+1} 中的具有下述性質的任一綫性映象；H 在 $|M'|\times(0)$ 与 $|M'|\times(1)$ 上各与 F_0 与 F_1 重合，且 $H(|M''|\times(t))\subset R^N_t$, $t\in I$. 今將 $\widetilde{M}$ 的頂点在 H 下的一切象点略作移动使在所得 $\widetilde{M}$ 到 R^{N+1} 中的綫性映象 H' 所有 $\widetilde{M}$ 的頂点的象点都处于一般位置. 記 H' 在 $M'\times(0)$ 与 $M'\times(1)$ 上的限制为 F'_0 与 F'_1. 所择移动可取得充分的小，使对 $\widetilde{K}^*$ 的任意 $N-1$ 維 $\sigma\times\tau$，奇异鏈 $F'_0(\sigma\times(0)\times I)$ 与 $F'_0(\tau\times(0)\times I)$ 有完滿定义的相交指数，且此相交指数与 $F_0(\sigma\times I)$, $F_0(\tau\times I)$ 的相交指数相等. 同样奇异鏈 $F'_1(\sigma\times(1)\times I)$ 与 $F'_1(\tau\times(1)\times I)$ 亦有一完滿定义的相交指数与 $F_1(\sigma\times I)$, $F_1(\tau\times I)$ 的相交指数相等. 于是对 $\widetilde{K}^*$ 中任意 $N-1$ 維胞腔 $\sigma\times\tau$ 有

$$\theta^{N-1}_{F_0}(\sigma\times\tau)=\phi(F'_0(\sigma\times(0)\times I),F'_0(\tau\times(0)\times I)),$$
$$\theta^{N-1}_{F_1}(\sigma\times\tau)=\phi(F'_1(\sigma\times(1)\times I),F'_1(\tau\times(1)\times I)).$$

今定义一 $\widetilde{M}''^*$ 中的上鏈 θ^{N-1} 使对 $\widetilde{M}''^*$ 的任意 $N-1$ 維胞腔 $\tilde{\sigma}\times\tilde{\tau}$，我們有

$$\theta^{N-1}(\tilde{\sigma}\times\tilde{\tau})=\phi(H'(\tilde{\sigma}\times I),H'(\tilde{\tau}\times I)).$$

与前同样，θ^{N-1} 为一 $\widetilde{M}''^*$ 中的 ρ_N- 上閉鏈（参閱 § 6 中的附註）．命 j_0,j_1 为 K 到 M'' 中的单純映象，定义如 $j_0(a)=(a,0)$，$j_1(a)=(a,1)$，此处 a 为 K 的任意頂点，又命它們所引出 $\widetilde{K}^*$ 到 $\widetilde{M}''^*$ 中的映象为 $\tilde{j}_0$ 与 $\tilde{j}_1$．显然 $\tilde{j}_0^{\#}\theta^{N-1}=\theta^{N-1}_{F_0}$，$\tilde{j}_1^{\#}\theta^{N-1}=\theta^{N-1}_{F_1}$．与 § 6 中定理 10 的証明那样，由此得 $\theta^{N-1}_{F_0}\underset{\rho_N}{\sim}\theta^{N-1}_{F_1}$ 因而 f,g 的一个精致联接映象 F 所定的 ρ_N- 上同調类与 F 的选择无关．

今由 § 5 的定理 9，任意接近于 f,g 有 K 到 R^N 中成正規偶的綫性实現 f',g' 存在．例如，我們可取 f',g' 使 $d(f,f')<\frac{1}{2}\delta_f$，$d(g,g')<\frac{1}{2}\delta_g$．映象 f',g' 各与 f 与 g 綫性同痕．因之有 $K\times\left[0,\frac{1}{3}\right]$ 与 $K\times\left[\frac{2}{3},1\right]$ 的单純剖分 M_0 与 M_1 以及 M_0 到 R^N 中的綫性映象 h_0 与 M_1 到 R^N 中的綫性映象 h_1，各实現这些綫性同痕，且对 K 的任一对非对角性胞腔 σ,τ，$h_0\left(|\sigma|\times\left[0,\frac{1}{3}\right]\right)$ 与 $h_0\left(|\tau|\times\left[0,\frac{1}{3}\right]\right)$ 不相遇，同样 $h_1\left(|\sigma|\times\left[\frac{2}{3},1\right]\right)$ 与 $h_1\left(|\tau|\times\left[\frac{2}{3},1\right]\right)$ 也不相遇．命 F': $|K|\times I\to R^{N+1}$ 为正規偶 f',g' 所协定的映象，因而 ${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f,g}(K)$ 含有一 ρ_N- 上閉鏈 $\theta^{N-1}_{f',g'}$，定义如

$$\theta^{N-1}_{f',g'}(\sigma\times\tau)=\phi(F'(\sigma\times I),F'(\tau\times I));$$

此处 $\sigma\times\tau$ 为 $\widetilde{K}^*$ 中 $N-1$ 維胞腔．对 F' 可取一 $K\times I$ 的充分小单純剖分 M' 与一 M' 到 R^{N+1} 中的綫性映象 F''，与 F' 充分接近，在 $|K|\times(0)+|K|\times(1)$ 上与 F' 重合，并給出 f',g' 的一个精致的联接映象 F'' 可选择得与 F' 充分接近使对 $\widetilde{K}^*$ 中任意 $N-1$ 維胞腔，$\phi(F''(\sigma\times I),F''(\tau\times I))$ 有完满定义并与 $\phi(F'(\sigma\times I),F'(\tau\times I))$ 相等，因而有

$$\theta^{N-1}_{f',g'}(\sigma\times\tau)=\phi(F''(\sigma\times I),F''(\tau\times I)).$$

今定义一 $|K|\times I$ 到 R^{N+1} 中的映象 F 为 $(x\in|K|)$，

$$F(x,t)=\begin{cases}(h_1(x,t),t), & \frac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1,\\ (h_0(x,t),t), & 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{3},\\ \pi F''((x,3t-1),t), & \frac{1}{3}\leqslant t\leqslant\frac{2}{3},\end{cases}$$

其中 π 为 $R^{N+1}=R^N\times L$ 到 R^N 上的自然投影．命 $\widetilde{M}$ 为 $K\times I$ 的一个单純剖分，使其同时为以下諸复合形的剖分：$K\times\left[0,\frac{1}{3}\right]$ 上的 M_0，$K\times\left[\frac{2}{3},1\right]$ 上的 M_1，以及 $K\times\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$ 上在映象 $h:(x,t)\to(x,3t-1)$，$x\in|K|$，$\frac{1}{3}\leqslant t\leqslant\frac{2}{3}$，下与 $K\times I$ 上 M' 同构的 M''．于是 F 显为 $K\times I$ 的剖分 $\widetilde{M}$ 的剖分到 R^{N+1} 中的一个綫性映綫，由于 f',g',h_0,h_1 的选择，这給出了 f,g 的一个精致的联接映象．由此得对 $\widetilde{K}^*$ 的任一 $N-1$ 維胞腔 $\sigma\times\tau$，

$$\theta^{N-1}_F(\sigma\times\tau)=\phi(F(\sigma\times I),F(\tau\times I)).$$

但对这样的 $\sigma \times \tau$ 显然有

$$\phi(F''(\sigma \times I), F''(\tau \times I)) = \phi(F(\sigma \times I), F(\tau \times I)).$$

故得

$$\theta_F^{N-1} = \theta_{f',g'}^{N-1} \in {}^{\rho_N}\Theta_{f,g}^{N-1}(K).$$

与本証明的第一部分相連，即知由任意 f,g 間精致的联接映象 F 所定 ρ_N- 上閉鏈 θ_F^{N-1} 的 ρ_N- 上同調类等于同痕类 ${}^{\rho_N}\Theta_{f,g}^{N-1}(K)$. 定理因之完全証明.

附注. 由于上述定理，一个有限单純复合形 K 到一定向 R^N 中一对綫性实現 f,g 的同痕类 ${}^{\rho_N}\Theta_{f,g}^{N-1}(K)$ 亦可定义为 f,g 間任一精致的联接映象 F 如 (1) 所定 $\tilde{K}^*$ 中 ρ_N- 上閉鏈 θ_F^{N-1} 的 ρ_N- 上同調类.

定理 13. 对一个有限单純复合形 K 到一定向 R^N 中的綫性实現 f,g 与 h 有

$$ {}^{\rho_N}\Theta_{f,f}^{N-1}(K) = 0, \tag{2}$$

$$ {}^{\rho_N}\Theta_{f,g}^{N-1}(K) = -{}^{\rho_N}\Theta_{g,f}^{N-1}(K), \tag{3}$$

$$ {}^{\rho_N}\Theta_{f,g}^{N-1}(K) + {}^{\rho_N}\Theta_{g,h}^{N-1}(K) = {}^{\rho_N}\Theta_{f,h}^{N-1}(K). \tag{4}$$

証. 我們可无損于一般性而假設 f,g 与 h 中任一对都是正規的. 命 F_1 与 F_2 各为 $|K| \times I$ 到 R^{N+1} 中由 (f,g) 与 (g,h) 所协定的映象，因而

$$\theta_{f,g}^{N-1} \in {}^{\rho_N}\Theta_{f,g}^{N-1}(K),\quad \theta_{g,h}^{N-1} \in {}^{\rho_N}\Theta_{g,h}^{N-1}(K),$$

此处

$$\theta_{f,g}^{N-1}(\sigma \times \tau) = \phi(F_1(\sigma \times I), F_1(\tau \times I)),$$

$$\theta_{g,h}^{N-1}(\sigma \times \tau) = \phi(F_2(\sigma \times I), F_2(\tau \times I)),$$

$\sigma \times \tau$ 为 $\tilde{K}^*$ 中任意 $N-1$ 維胞腔. 在 $C_{N+1}(|K| \times I)$ 的拓扑中任意接近于 F_1 与 F_2 有 $K \times I$ 的某单純剖分到 R^{N+1} 中的綫性映象 F_1' 与 F_2' 存在，在 $|K| \times (0) + |K| \times (1)$ 上各与 F_1, F_2 重合，且給出了 (f,g) 与 (g,h) 的精致的联接映象. 在所取 F_1', F_2' 充分接近于 F_1, F_2 时并有

$$\phi(F_1'(\sigma \times I), F_1'(\tau \times I)) = \phi(F_1(\sigma \times I), F_1(\tau \times I)),$$

因而对任意 $\tilde{K}^*$ 中的 $N-1$ 維胞腔 $\sigma \times \tau$ 有

$$\theta_{f,g}^{N-1}(\sigma \times \tau) = \phi(F_1'(\sigma \times I), F_1'(\tau \times I)),$$

与

$$\theta_{g,h}^{N-1}(\sigma \times \tau) = \phi(F_2'(\sigma \times I), F_2'(\tau \times I)).$$

今設 M' 为 $K \times I$ 的一个单純剖分，使其同时为 $K \times \left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上在映象 $h_1: (x,t) \to (x, 2t)$ 下与 $K \times [0,1]$ 上剖分 M_1' 同构的剖分 M_1'' 的一个剖分，也是 $K \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上在映象 $h_2: (x,t) \to (x, 2t-1)$ 下与 $K \times [0,1]$ 上剖分 M_2' 同构的剖分 M_2'' 的一个剖分，此处 $x \in |K|$. 今定义一映象 $F: |K| \times I \to R^{N+1}$ 使对任意 $x \in |K|$ 有

$$F(x,t) = \begin{cases} (\pi F_1'(x, 2t), t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ (\pi F_2'(x, 2t-1), t), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

显然 F 是 M' 到 R^{N+1} 中的一个綫性映象，給出了 (f,h) 的一个精致的联接映象，因之由定理 12 我們有

$$\theta_F^{N-1} \in {}^{\rho_N}\Theta_{f,h}^{N-1}(K),$$

此处
$$\theta_F^{N-1}(\sigma\times\tau)=\phi(F(\sigma\times I),F(\tau\times I)),$$
$\sigma\times\tau$ 为 $\widetilde{K}^*$ 中的任意 $N-1$ 維胞腔. 显然
$$\phi(F(\sigma\times I),F(\tau\times I))=\phi(F_1'(\sigma\times I),F_1'(\tau\times I))+\phi(F_2'(\sigma\times I),F_2'(\tau\times I)).$$
故对 $\widetilde{K}^*$ 的任意 $N-1$ 維胞腔得
$$\theta_F^{N-1}(\sigma\times\tau)=\theta_{f,g}^{N-1}(\sigma\times\tau)+\theta_{g,h}^{N-1}(\sigma\times\tau).$$
因之 $\theta_F^{N-1}=\theta_{f,g}^{N-1}+\theta_{g,h}^{N-1}$, 或即
$${}^{\rho_N}\Theta_{f,g}^{N-1}(K)+{}^{\rho_N}\Theta_{g,h}^{N-1}(K)={}^{\rho_N}\Theta_{f,h}^{N-1}(K),$$
这証明了(4).

因为(2)式証明极簡而(3)式可从(4)中置 $h=f$ 以得出,故定理已完全証明.

§8. 各种同痕类間的一个关系

在一个有限单純复合形K到一定向 R^N 中的任两綫性实现 f,g 的諸上类 ${}^{\rho_N}\Theta_f^{N-1}(K)$, ${}^{\rho_N}\Theta_g^{N-1}(K)$ 与 ${}^{\rho_N}\Theta_{f,g}^{N-1}(K)$ 之間有一关系如下定理所示:

定理 14. 对有限单純复合形K到定向 R^N 中的任一对綫性实现 f,g 有
$$2\,{}^{\rho_N}\Theta_{f,g}^{N-1}(K)={}^{\rho_N}\Theta_f^{N-1}(K)-{}^{\rho_N}\Theta_g^{N-1}(K).\tag{1}$$

証. 对任两 $R^{N+1}=R^N\times L$ (L 如前表直綫 $-\infty<t<+\infty$) 中的奇异鏈A与B, 在点集 $|A|$ 与 $|B|$ 不相遇时,我們将以 $j(A,B)$ 表由点集 $j(|A|\times|B|)$ 所定在 R^{N+1} 中单位球 S^N 上的奇异鏈,此处 $j(x,y)$ 表从 R^{N+1} 的原点 0 出发而平行于自 x 至 y 方向的射綫与 S^N 的交点, $x\neq y$ 为 R^{N+1} 中的任一对不同点. 由于§5的定理9, f,g 可假定为正規偶. 命 $F:|K|\times I\to R^{N+1}$ 为綫性实现 f 与 g 所协定的映象, 对于任意使 $\dim\sigma+\dim\tau\leqslant N-3$ 的胞腔 $\sigma\times\tau\in\widetilde{K}^*$, 由 $j(F(x,t)F(y,t))$, 此处 $x\in|\sigma|$, $y\in|\tau|$, $t\in I$, 所成的点集 $R(\sigma,\tau)$ 的維数 $\leqslant N-2$. 同样,对任意使 $\dim\sigma+\dim\tau\leqslant N-2$ 的胞腔 $\sigma\times\tau\in\widetilde{K}^*$, 由 $j(F(x,t),F(y,t))$, 此处 $x\in|\sigma|$, $y\in|\tau|$, $t=0$ 或 1, 所成的点集 $R'(\sigma,\tau)$ 的維数 $\leqslant N-2$. 因之可在 R_0^N 中的单位球 S^{N-1} 上取一点 e 不在任何上述这些点集 $R(\sigma,\tau)$ 与 $R'(\sigma,\tau)$ 之內. 取 S^N 与 S^{N-1} 的定向各与 R^{N+1} 与 R^N 的定向协合. 对任意 S^N (或 S^{N-1})上N維(或 $N-1$ 維)奇异鏈 C, 它的边界 $|\partial C|$ 不含 e, 则 C 在 e 的局部复盖度将記作 $\mathrm{Deg}_e^{(N)}C$ (或 $\mathrm{Deg}_e^{(N-1)}C$).

今定义 $\varphi_f,\varphi_g\in C^{N-1}(\widetilde{K}^*)$ 与 $\phi\in C^{N-2}(\widetilde{K}^*)$ 如
$$\varphi_f(\sigma\times\tau)=\mathrm{Deg}_e^{(N-1)}j(f(\sigma),f(\tau)),$$
$$\varphi_g(\sigma\times\tau)=\mathrm{Deg}_e^{(N-1)}j(g(\sigma),g(\tau)),$$
与
$$\phi(\xi\times\eta)=(-1)^{\dim\xi}\cdot\mathrm{Deg}_e^{(N)}j(F(\xi\times I),F(\eta\times I)),$$
其中 $\sigma\times\tau,\xi\times\eta\in\widetilde{K}^*$, $\dim\sigma+\dim\tau=N-1$, 而 $\dim\xi+\dim\eta=N-2$. 由于点 e 的选择,这些上鏈都是有完滿定义的. 从类 ${}^{\rho_N}\Theta_f^{N-1}(K)$ 的定义有(参閱§1末的附註与§2末)
$$\theta_f=\bar{\rho}_N\varphi_f=(1+(-1)^NT_K)\varphi_f\in{}^{\rho_N}\Theta_f^{N-1}(K),$$
同样有
$$\theta_g=\bar{\rho}_N\varphi_g=(1+(-1)^NT_K)\varphi_g\in{}^{\rho_N}\Theta_g^{N-1}(K).$$
对 R^{N+1} 中的任意奇异鏈A与B命 $s(A,B)$ 表由点集 $s(|A|\times|B|)$ 所載的奇异鏈,

此处 $s(x,y) = y - x$, x,y 为 R^{N+1} 中任意两点，視作向量. 若 $\dim A + \dim B = N + 1$, $|\partial A|$ 与 $|B|$ 不相遇，又 $|A|$ 与 $|\partial B|$ 不相遇，則鏈 $s(A,B)$ 在定向 R^{N+1} 的原点 0 处有一局部复盖度，将記作 $\mathrm{Deg}_0^{(N+1)} s(A,B)$. 我們知道

$$\mathrm{Deg}_0^{(N+1)} s(A,B) = (-1)^{\dim A} \cdot \phi(A,B)$$

且等于 $j(\partial A,B) + (-1)^{\dim A} \cdot j(A,\partial B)$ 在定向球 S^N 上的整体复盖度，因之有

$$\mathrm{Deg}_0^{(N+1)} s(A,B) = \mathrm{Deg}_e^{(N)} j(\partial A,B) + (-1)^{\dim A} \cdot \mathrm{Deg}_e^{(N)} j(A,\partial B),$$

此处假定右边的每項都有意义.

今考察一个綫段 $I' = [-\varepsilon, 1+\varepsilon]$，此处 $\varepsilon > 0$ 是任意的. 于是奇异鏈 $A = F(\sigma \times I)$ 与 $B = F(\tau \times I')$ 符合上面关于 A,B 的要求，因而有

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\dim\sigma+1} \cdot \phi(F(\sigma \times I), F(\tau \times I')) = \\
&\quad = \mathrm{Deg}_0^{(N+1)} s(F(\sigma \times I), F(\tau \times I')) = \\
&\quad = \mathrm{Deg}_e^{(N)} j(\partial F(\sigma \times I), F(\tau \times I')) + (-1)^{\dim\sigma+1} \cdot \mathrm{Deg}_e^{(N)} j(F(\sigma \times I), \partial F(\tau \times I')) = \\
&\quad = \mathrm{Deg}_e^{(N)} j(F(\partial\sigma \times I), F(\tau \times I')) + (-1)^{\dim\sigma+1} \cdot \mathrm{Deg}_e^{(N)} j(F(\sigma \times I), F(\partial\tau \times I')) + \\
&\qquad + (-1)^{\dim\sigma} \cdot \mathrm{Deg}_e^{(N)} j(F(\sigma \times (1) - \sigma \times (0)), F(\tau \times I')) + \\
&\qquad + (-1)^{N} \cdot \mathrm{Deg}_e^{(N)} j(F(\sigma \times I), F(\tau \times (1+\varepsilon) - \tau \times (-\varepsilon))).
\end{aligned}$$

注意在最后一式中的末一項显然为 0，而其他諸項在易 I' 为 I 时其值并不改变. 同样显有

$$\phi(F(\sigma \times I), F(\tau \times I)) = \phi(F(\sigma \times I), F(\tau \times I')).$$

再者，对 $i = 0,1$ 又有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Deg}_e^{(N)} j(F(\sigma \times (i)), F(\tau \times I)) &= \mathrm{Deg}_e^{(N-1)} j(F(\sigma \times (i)), F(\tau \times (i))) \\
&= \begin{cases} \mathrm{Deg}_e^{(N-1)} j(g(\sigma), g(\tau)), & i = 1, \\ \mathrm{Deg}_e^{(N-1)} j(f(\sigma), f(\tau)), & i = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\dim\sigma+1} \cdot \phi(F(\sigma \times I), F(\tau \times I)) = \\
&= \mathrm{Deg}_e^{(N)} j(F(\partial\sigma \times I), F(\tau \times I)) + (-1)^{\dim\sigma+1} \cdot \mathrm{Deg}_e^{(N)} j(F(\sigma \times I), F(\partial\tau \times I)) + \\
&\quad + (-1)^{\dim\sigma} \cdot \mathrm{Deg}_e^{(N-1)} j(g(\sigma), g(\tau)) - (-1)^{\dim\sigma} \cdot \mathrm{Deg}_e^{(N-1)} j(f(\sigma), f(\tau)).
\end{aligned}$$

根据 θ_f, θ_g, ψ 与 $\theta_{f,g}^{N-1}$ 的定义有

$$\begin{aligned}
\theta_{f,g}^{N-1}(\sigma \times \tau) &= \phi(F(\sigma \times I), F(\tau \times I)) = \\
&= \psi(\partial\sigma \times \tau) + (-1)^{\dim\sigma} \psi(\sigma \times \partial\tau) + \varphi_f(\sigma \times \tau) - \varphi_g(\sigma \times \tau)
\end{aligned}$$

或

$$\theta_{f,g}^{N-1}(\sigma \times \tau) = \delta\psi(\sigma \times \tau) + \varphi_f(\sigma \times \tau) - \varphi_g(\sigma \times \tau). \tag{2}$$

今有

$$\begin{aligned}
\theta_{f,g}^{N-1}(\sigma \times \tau) &= \phi(F(\sigma \times I), F(\tau \times I)) = \\
&= (-1)^{(\dim\sigma+1)(\dim\tau+1)} \cdot \phi(F(\tau \times I), F(\sigma \times I)) = \\
&= (-1)^{\dim\sigma \dim\tau + N} \cdot \theta_{f,g}^{N-1}(\tau \times \sigma) = \\
&= (-1)^{N} \cdot T_K\, \theta_{f,g}^{N-1}(\sigma \times \tau).
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
2\theta_{f,g}^{N-1}(\sigma \times \tau) &= (1 + (-1)^N T_K)\, \theta_{f,g}^{N-1}(\sigma \times \tau) = \\
&= \bar{\rho}_N\, \theta_{f,g}^{N-1}(\sigma \times \tau) = \\
&= \delta\bar{\rho}_N \psi(\sigma \times \tau) + \bar{\rho}_N \varphi_f(\sigma \times \tau) - \bar{\rho}_N \varphi_g(\sigma \times \tau),
\end{aligned}$$

或

$$2\theta_{f,g}^{N-1}(\sigma \times \tau) = \delta\bar{\rho}_N \psi(\sigma \times \tau) + \theta_f(\sigma \times \tau) - \theta_g(\sigma \times \tau).$$

因 $\sigma \times \tau$ 为 $\tilde{K}^*$ 的任意 $N-1$ 維胞腔,故有

$$2\ \theta_{f,g}^{N-1} \underset{\rho_N}{\sim} \theta_f - \theta_g,$$

或

$$2\ {}^{\rho_N}\Theta^{N-1}(K) = {}^{\rho_N}\Theta_f^{N-1}(K) - {}^{\rho_N}\Theta_g^{N-1}(K).$$

証毕.

定理 15. 若 f, g 为有限单純复合形 K 到 R^N 中的两个綫性实现而 $f(|K|)$ 与 $g(|K|)$ 都在 R^N 的一个 $N-1$ 維綫性子空間 R^{N-1} 中,则 ${}^{\rho_N}\Theta_{f,g}^{N-1}(K) = 0$.

証. 命 S^{N-1} 为 $R_0^N = R^N \times (0) \subset R^{N+1} = R^N \times L$ 中的单位球而 e 为 S^{N-1} 上的一点,使过 e 的半径与綫性子空間 $R_0^{N-1} = R^{N-1} \times (0) \subset R_0^N$ 垂直. 今将 f, g 作微小移动至綫性实现 f' 与 g' 使其成一正規偶. 我們可取移动充分的小,使易 (f,g) 为 (f',g') 时 e 不在如前面定理的証明中的任一点集 $R(\sigma,\tau)$ 或 $R'(\sigma,\tau)$ 中. 应用前述証明中的同样記号有

$$\varphi_{f'}(\sigma \times \tau) = \mathrm{Deg}_e^{(N-1)} j(f'(\sigma), f'(\tau)) = 0,$$

$$\varphi_{g'}(\sigma \times \tau) = \mathrm{Deg}_e^{(N-1)} j(g'(\sigma), g'(\tau)) = 0,$$

与

$$\psi'(\xi \times \eta) = (-1)^{\dim \xi} \cdot \mathrm{Deg}_e^{(N)} j(F'(\xi \times I), F'(\eta \times I)) = 0,$$

其中 $\sigma \times \tau, \xi \times \eta \in \tilde{K}^*$, $\dim \sigma + \dim \tau = N-1$, $\dim \xi + \dim \eta = N-2$, 而 F' 为 (f',g') 的协定映象. 象以前的(2)式那样可得

$$\theta_{f',g'}^{N-1}(\sigma \times \tau) = \delta\psi'(\sigma \times \tau) + \varphi_{f'}(\sigma \times \tau) - \varphi_{g'}(\sigma \times \tau) = 0,$$

此处 $\sigma \times \tau$ 为 $\tilde{K}^*$ 中的任意 $N-1$ 維胞腔. 故 $\theta_{f',g'}^{N-1} = 0$ 或 ${}^{\rho_N}\Theta_{f,g}^{N-1}(K) = 0$, 証毕.

参 考 文 献

[1] 吳文俊: (Wu Wen-tsün), On the reduced products and the reduced cyclic products of a space, *Deut. Math. Vern.*, **61** (1958) 65—75.

[2] ——,有限复合形在欧氏空間中的同痕問題, I, II, 科学記录, **3** (1959), 274—280.

[3] ——,关于拓扑空間的 $\Phi_{(p)}$ 类,科学記录, **1** (1957), 347—350.

[4] ——,A theory of imbedding and immersion in Euclidean spaces, Peking, 1957 (Mimeographed).

[5] ——,有限可剖分空間的新拓扑不变量,数学学报, **3** (1953) 261—290.

ON THE ISOTOPY OF A COMPLEX IN A EUCLIDEAN SPACE (I)

WU WEN-TSÜN

(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

For any finite simplex complex K let $\widetilde{K}^*$ be its reduced two-fold product consisting of all cells $\sigma \times \tau$ of the product complex $K \times K$ for which σ and τ have no vertices of K in common. The permutation $\sigma \times \tau \longleftrightarrow \tau \times \sigma$ is of period two and has no fixed cells so that special groups ${}^{\rho}H^r(\widetilde{K}^*)$ may be defined according to the theory of P. A. Smith about periodic transformations, where ρ is either $d = 1 - t$ or $s = 1 + t$, t being the chain map $t(\sigma \times \tau) = (-1)^{\dim \sigma \dim \tau} (\tau \times \sigma)$.

A continuous mapping f of the space $|K|$ of K in a Euclidean space R^N of dimension N is called an imbedding if f is topological. It is said to be a linear map of K in R^N if f is linear on each simplex of K. Two linear maps f, g of K in R^N will be said to be linearly isotopic if there exist a simplicial subdivision M' of the product complex $M = K \times I$ (I being the interval $[0, 1]$) in R^N and a linear map F of M' in R^N such that $F/|K| \times (0) \equiv f$, $F/|K| \times (1) \equiv g$, and for each $t \in I$, $F/|K| \times (t)$ gives an imbedding of $|K|$ in R^N. Let $\rho_N = 1 + (-1)^{N-1} t$, then for any two linear imbeddings f, g of K in R^N (oriented in a definite manner) a certain class ${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f,g}(K) \in {}^{\rho_N}H^{N-1}(\widetilde{K}^*)$ may be defined the vanishing of which is a necessary condition for f, g to be linearly isotopic. It turns out that in the "critical" case $2 \dim K + 1 = N$ ($\dim K > 1$), this condition is not only necessary but also sufficient, which will be studied more in detaili n a succeeding paper. The present paper introduces the necessary concepts, gives definitions of the classes ${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f,g}$ and studies their elementary properties of which we shall mention the following one:

For any two linear imbeddings f, g of a finite simplicial complex K in a Euclidean space R^N definitely oriented we have

$$2\,{}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f,g}(K) = {}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f}(K) - {}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{g}(K), \tag{1}$$

in which ${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f}(K) \in {}^{\rho_N}H^{N-1}(\widetilde{K}^*)$ is a certain class associated to any linear imbedding of K in R^N (oriented). It is also defined in this paper and ${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f}(K) = {}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{g}(K)$ is easily seen to be necessary for two linear imbeddings f, g of K in R^N to be linearly isotopic. The classes ${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f}(K)$ have the advantage that they may also be defined for any topological imbedding of any topological space in R^N and the identity of these classes for two topological imbeddings is again necessary for these imbeddings to be topologically isotopic, However, the appearance of the factor 2 in the left hand of (1) shows that in the case of linear imbeddings of complexes the classes ${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f,g}(K)$ would be more efficient than ${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f}(K)$ in studying their linear isotopy. It is in fact the classes ${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f,g}$, but not the classes ${}^{\rho_N}\Theta^{N-1}_{f}$, which furnish the necessary and sufficient condition for the linear isotopy in the critical case as mentioned above.

For a more detailed abstract of the theory of linear isotopy see also [2].

第9卷 第4期 数 学 学 报 Vol. 9, No. 4
1959 年 12 月 ACTA MATHEMATICA SINICA Dec., 1959

排队論中之一問題——*M*/*M*/*n*

越 民 义
(中国科学院数学研究所)

排队論問題中最常遇到的也是較为重要的問題之一，就是在随机輸入，服务时間按負指数分布的假定之下，决定有关各种概率的問題．我們用符号 $M/M/n$ 表示这样的一个服务系統："顧客"輸入服从参数 λ 的 Poisson 分布，先到来，先服务，服务时間的长短服从参数 μ 的負指数分布，共有 n 个服务台．若"顧客"到来时发現服务台有空，則他可在空下的服务台中随意挑选一个而立刻受到服务，若无服务台空下，則他即依到来的次序列队等待，直到被服务完毕之后才离开．近年来，不少的作者（[1]，[2]，[3]，[4]，[5]）皆集中于 $M/M/1$ 討論的情形，得出了完整的結果．令 $p_k(t)$ 表示在时刻 t 队伍长度为 k（包括正在被服务的顧客在內）的概率．上面引到的这些作者皆以不同的方法得出了 $p_k(t)$ 的精确表达式，从而可以得出各种有关的概率．对于 $M/M/n$ 的情形，所得到的結果似乎还較初等．本文的目的卽在于証明

$$p_k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{ut}\alpha^k}{u\varphi(u)}\,du, \quad (k \geqslant n, c > 0),$$

于此，α 为二次方程

$$n\mu x^2 - (\lambda + u + n\mu)x + \lambda = 0$$

之二根中絕对值为最小者(唯一确定)，

$$\varphi(u) = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\mu}{\lambda}\alpha\sum_{j=0}^{n-2}(n-1-j)\alpha^j\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\lambda^{-i}(u+\mu)\cdots(u+i\mu);$$

然后对于一些簡单的情况 $(n = 1,2,3)$ 証明

$$\lim_{t\to\infty} p_k(t) = p_k$$

存在．如所周知，在此項存在性旣經証明之后，欲求 p_k，則只是一簡单的代数問題．关于上之极限的存在，Хинчин[6] 曾說过这样的話："在带消失系統中我們完滿地証明了这些极限 (p_k) 的存在性．对于带等待的系統，这样的証明也可以实现，然而在目前情形要复杂得多，而且要求本質上新的概念"．他又說："我們不知道在什么文献中有这个証明的任何一种叙述，虽然問題本身曾被这里引用的方法多次考察过 (Erlang[7]，Fry[8]，Колмогоров[9]，Feller[10])．Erlang 把极限过程的可能性列作一条特殊假定，其余的作者則只限于簡短地指出証明的可能性"．

Feller[10] 曾謂 $\lim\limits_{t\to\infty} p_k(t)$ 的存在可由 $p_k(t)$ 的表达式或一般遍历理論得到証明．但如同 Хинчин 一样，除了 $n = 1$ 的情形之外，我們还不知道在什么地方有此种表达式和所說的証明．根据本文的結果，我們已将所說的极限的存在問題化为一单純的代数問題．看来問題不久当可全部解决．

引理 1. (Abelian，参看，例如 [11]，p. 487). 設

$$f(u)=\int_0^\infty e^{-ut}F(t)dt;$$

又設 $f(a+iy)$ 关于 y 之前 $n(\geqslant 1)$ 次导数存在，且当 $y\to\infty$ 时，$f'(a+iy),\cdots,$ $f^{(n-1)}(a+iy)$ 趋于 0，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}f^{(n)}(a+iy)dy$$

在广义 Riemann 意义之下存在，且当 $t\geqslant T$ 时一致收斂．則

$$F(t)=O(t^{-n}e^{at}),\quad t\to\infty.$$

引理 2. (Tauberian，[11]，p. 512.) 若 $F(t)$ 为实函数，$f(u)$ 当 $u>0$ 时收斂，則由

$$f(u)\sim\frac{c}{u^{\gamma}}\quad(u\to 0)\ \text{及}\ F(t)=O(t^{\gamma-1}),\quad t>0$$

即得

$$\int_0^t F(\tau)d\tau\sim\frac{c}{\Gamma(\gamma+1)}t^{\gamma},\quad t\to\infty.$$

引理 3. 命 $A_{n-2}=\frac{\mu}{\lambda}$，$A_{n-3}=\frac{\mu}{\lambda^2}(u+(n-2)\mu)$，当 $i>3$ 时，A_{n-i} 由

$$\lambda A_{n-i}=(\lambda+u+(n-i+1)\mu)A_{n-i+1}-(n-i+2)\mu A_{n-i+2}\tag{1}$$

所定义．命 $A(n)$ 表示命題：

$$\sum_{i=2}^{n}A_{n-i}=\frac{\mu}{\lambda}\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}\lambda^{-i}(u+\mu)\cdots(u+i\mu);\tag{2}$$

又命 $B_{n-2}=\frac{\mu}{\lambda}$，$B_{n-1}=0$，当 $i>2$ 时，B_{n-i} 由

$$\lambda B_{n-i}=(\lambda+u+(n-i+1)\mu)B_{n-i+1}-(n-i+2)\mu B_{n-i+2}\tag{3}$$

所定义．命 $B(n)$ 表示命題：

$$\sum_{i=1}^{n}B_{n-i}=\frac{\mu}{\lambda}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\lambda^{-i}(u+\mu)\cdots(u+i\mu).\tag{4}$$

則 $A(n)$，$B(n)$ 对任何自然数 $n\geqslant 3$ 皆成立．

証. 显而易見，$A(3)$，$B(3)$ 皆成立．今設当 $i\leqslant n-1$ 时，$A(i)$ 及 $B(i)$ 皆成立．我們現来証 $A(n)$ 成立．由假定，

$$\lambda A_{n-4}=(\lambda+u+(n-3)\mu)\frac{\mu}{\lambda^2}(u+(n-2)\mu)-(n-2)\mu\frac{\mu}{\lambda}$$

或

$$A_{n-4}=\frac{\mu}{\lambda^3}\{\lambda u+(u+(n-3)\mu)(u+(n-2)\mu)\}.$$

作

$$A'_{(n-1)-3}=\frac{1}{\lambda}(u+(n-2)\mu)\cdot\frac{\mu}{\lambda^2}(u+((n-1)-2)\mu),$$

$$A'_{(n-1)-2}=\frac{1}{\lambda}(u+(n-2)\mu)\cdot\frac{\mu}{\lambda},$$

$$B'_{(n-2)-2}=\frac{u}{\lambda}\cdot\frac{\mu}{\lambda},$$

$$B'_{(n-2)-1}=\frac{u}{\lambda}\cdot o.$$

则

$$A_{n-4}=A'_{(n-1)-3}+B'_{(n-2)-2},$$
$$A_{n-3}=A'_{(n-1)-2}+B'_{(n-1)-1}.$$

将 (1) 改写成

$$\lambda\{A'_{(n-1)-(i-1)}+B'_{(n-2)-(i-2)}\}=\{\lambda+u+[(n-1)-(i-2)]\mu\}A'_{(n-1)-(i-2)}-$$
$$-[(n-1)-(i-3)]\mu A'_{(n-1)-(i-3)}+\{\lambda+u+[(n-2)-$$
$$-(i-3)]\mu\}B'_{(n-2)-(i-3)}-[(n-2)-(i-4)]\mu B'_{(n-2)-(i-4)}$$

之形式. 諸 A'_i 和諸 B'_i 之获得皆符合我們引理中 A_i, B_i 之定义, 所不同者, 在諸 A'_i, 则在 n 的位置为 $n-1$, 在諸 B'_i, 则为 $n-2$; 同时 $A'_{(n-1)-3}$ 与 $A'_{(n-1)-2}$ 有一共同之因子 $\frac{1}{\lambda}(u+(n-2)\mu)$, $B'_{(n-2)-2}$ 与 $B'_{(n-2)-1}$ 有一共同之因子 $\frac{u}{\lambda}$. 然此只不过在相应之其余諸 A'_i 中乘上 $\frac{1}{\lambda}(u+(n-2)\mu)$, 在諸 B'_i 中乘上 $\frac{u}{\lambda}$. 由是, 由归納法之假定, 我們有

$$\sum_{i=0}^{n-2}A_i=\frac{\mu}{\lambda}+\sum_{i=0}^{n-3}A_i=\frac{\mu}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}(u+(n-2)\mu)\sum_{i=2}^{n-1}A_{(n-1)-i}+\frac{u}{\lambda}\sum_{i=0}^{n-2}B_{(n-2)-i}=$$

$$=\frac{\mu}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda^2}(u+(n-2)\mu)\sum_{i=0}^{n-3}\binom{n-3}{i}\lambda^{-i}(u+\mu)\cdots(u+i\mu)+\cdots+$$

$$+\frac{u\mu}{\lambda^2}\sum_{j=0}^{n-4}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\lambda^{-i}(u+\mu)\cdots(u+i\mu).$$

我們現來考虑 λ^{-i} 的系数. 不难看出,

λ^{-1} 的系数为 μ;

λ^{-2} 的系数为 $(n-2)\mu(u+\mu)$;

当 $i\geqslant 3$ 时, λ^{-i} 的系数为

$$\mu(u+(n-2)\mu)\binom{n-3}{i-2}(u+\mu)\cdots(u+(i-2)\mu)+$$

$$+u\mu\sum_{j=i-2}^{n-4}\binom{j}{i-2}(u+\mu)\cdots(u+(i-2)\mu)=$$

$$=\mu\left\{u\sum_{j=i-2}^{n-3}\binom{j}{i-2}+(n-2)\binom{n-3}{i-2}\mu\right\}(u+\mu)\cdots(u+(i-2)\mu)=$$

$$=\mu\binom{n-2}{i-1}(u+\mu)\cdots(u+(i-1)\mu),$$

于此，我們用到了显然的恆等式

$$\sum_{i=i}^{n}\binom{j}{i}=\binom{n+1}{i+1}.$$

由是，我們已經証明 $A(n)$ 成立.

我們現来証明 $B(n)$ 成立. 显而易見，

$$B_{n-3}=(\lambda+u+(n-2)\mu)\frac{\mu}{\lambda^2}.$$

写

$$A'_{n-3}=\frac{\mu}{\lambda^2}(u+(n-2)\mu),\quad B'_{(n-1)-2}=\frac{\mu}{\lambda},$$

$$A'_{n-2}=\frac{\mu}{\lambda},\qquad\qquad B'_{(n-1)-1}=0.$$

則有

$$B_{n-3}=A'_{n-3}+B'_{(n-1)-2},$$
$$B_{n-2}=A'_{n-2}+B'_{(n-1)-1}.$$

因我們已經証明 $A(n)$ 成立，而由假定，$B(i)$ 当 $i\leqslant n-1$ 时皆成立，故得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}B_{n-i}&=\sum_{i=2}^{n}A'_{n-i}+\sum_{i=1}^{n-1}B'_{(n-1)-i}=\\&=\frac{\mu}{\lambda}\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}\lambda^{-i}(u+\mu)\cdots(u+i\mu)+\\&+\frac{\mu}{\lambda}\sum_{j=0}^{n-3}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\lambda^{-i}(u+\mu)\cdots(u+i\mu)=\\&=\frac{\mu}{\lambda}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\lambda^{-i}(u+\mu)\cdots(u+i\mu).\end{aligned}$$

由归納法，$A(n)$ 与 $B(n)$ 对于任何自然数 n 皆成立.

定理 1. 命 $\varphi_n^*=\alpha^n$，$\varphi_{n-1}^*=\alpha^{n-1}$，$\alpha$ 为二次方程

$$n\mu x^2-(\lambda+u+n\mu)x+\lambda=0 \tag{5}$$

之一根；又設当 $i\geqslant 2$ 时，φ_{n-i}^* 由下式所定义：

$$\lambda\varphi_{n-i}^*=(\lambda+u+(n-i+1)\mu)\varphi_{n-i+1}^*-(n-i+2)\mu\varphi_{n-i+2}^*. \tag{6}$$

則

$$\sum_{i=0}^{n-2}\varphi_i^*=\sum_{i=1}^{n-2}\alpha^i-\frac{\mu}{\lambda}\alpha\sum_{j=0}^{n-2}(n-1-j)\alpha^j\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\lambda^{-i}(u+\mu)\cdots(u+i\mu).$$

証. 我們用归納法来証明本定理.

为清楚起見，我們将与 n 相应之 α 記作 α，与 $n-1$ 相应之 α 記作 α_1. 我們現来証明，在适当規定的化簡方法之下，若与 $n-1$ 相应之 $\varphi_i^*=\varphi_i^*(n-1)$ 为

$$\varphi_i^*(n-1)=\alpha_1^i-(n-i-2)\frac{\mu}{\lambda}\cdot\alpha_1^{i+1}-(n-i-3)\ a_{i,2}\alpha_1^{i+2}-\cdots-a_{i,n-i-2}\alpha_1^{n-2},$$

則与 n 相应之 $\varphi_i^*=\varphi_i^*(n)$ 必为

$$\varphi_i^*(n) = \alpha^i - (n-i-1)\frac{\mu}{\lambda}\alpha^{i+1} - (n-i-2)a_{i,2}\alpha^{i+2} - \cdots -$$
$$- 2a_{i,n-i-2}\alpha^{n-2} - a_{i,n-i-1}\alpha^{n-1}$$

之形式. 实际上,当 $i = n-2$ 及 $n-3$ 时, 此項論断显然成立(只須作簡单之运算即可看出). 今設此項論断时 $m \geqslant i$ 时成立,我們利用归納法証其对于 $m = i-1$ 时也成立.

我們現規定化簡方法如下:我們的 $\varphi_{i-1}^*(n)$(或 $\varphi_{i-1}^*(n-1)$)系由(6)式所定义. 在将相应的 φ_i^*, φ_{i+1}^* 代入之后, 我們即将 φ_i^* 与 φ_{i+1}^* 的首項利用相应的(5)式来化簡, 其余各項, 只作簡单的合併. 例如

$$\lambda\varphi_{n-2}^* = (\lambda + u + (n-1)\mu)\varphi_{n-1}^* - n\mu\varphi_n^* =$$
$$= (\lambda + u + n\mu)\alpha^{n-1} - n\mu\alpha^n - \mu\alpha^{n-1} =$$
$$= \lambda\alpha^{n-2} - \mu\alpha^{n-1}$$

或

$$\varphi_{n-2}^* = \alpha^{n-2} - \frac{\mu}{\lambda}\alpha^{n-1};$$

又

$$\lambda\varphi_{n-3}^* = (\lambda + u + (n-2)\mu)\left\{\alpha^{n-2} - \frac{\mu}{\lambda}\alpha^{n-1}\right\} - (n-1)\mu\alpha^{n-1} = \tag{7}$$
$$= \lambda\alpha^{n-3} - 2\mu\alpha^{n-2} - \frac{\mu}{\lambda}(u + (n-2)\mu)\alpha^{n-1}$$

或

$$\varphi_{n-3}^* = \alpha^{n-3} - 2\frac{\mu}{\lambda}\alpha^{n-2} - \frac{\mu}{\lambda^2}(u + (n-2)\mu)\alpha^{n-1}.$$

由假設,我們有

$$\lambda\varphi_{i-1}^*(n-1) = (\lambda + u + i\mu)\varphi_i^*(n-1) - (i+1)\mu\varphi_{i+1}^*(n-1) =$$
$$= (\lambda + u + i\mu)\left\{\alpha_1^i - (n-i-2)\frac{\mu}{\lambda}\alpha_1^{i+1} - (n-i-3)a_{i,2}\alpha_1^{i+2} - \cdots - a_{i,n-i-2}\alpha_1^{n-2}\right\} -$$
$$- (i+1)\mu\left\{\alpha_1^{i+1} - (n-i-3)\frac{\mu}{\lambda}\alpha_1^{i+2} - (n-i-4)a_{i+1,2}\alpha_1^{i+3} - \cdots - a_{i+1,n-i-3}\alpha_1^{n-2}\right\} =$$
$$= \lambda\alpha_1^{i-1} - (n-i-1)\alpha_1^i - (n-i-2)\left\{(\lambda + u + i\mu)\frac{\mu}{\lambda} - \mu\right\}\alpha_1^{i+1} -$$
$$- (n-i-3)\left\{(\lambda + u + i\mu)a_{i,2} - (i+1)\mu\cdot\frac{\mu}{\lambda}\right\}\alpha_1^{i+2} - (n-i-4)\times$$
$$\times\{(\lambda + u + i\mu)a_{i,3} - (i+1)\mu a_{i+1,2}\}\alpha_1^{i+3} - \cdots - [(\lambda + u + i\mu)a_{i,n-i-2} -$$
$$- (i+1)\mu a_{i+1,n-i-3}]\alpha_1^{n-2};$$

另一方面,根据归納法假設,我們有

$$\lambda\varphi_{i-1}^*(n) = (\lambda + u + i\mu)\varphi_i^*(n) - (i+1)\mu\varphi_{i+1}^*(n) =$$
$$= (\lambda + u + i\mu)\left\{\alpha^i - (n-i-1)\frac{\mu}{\lambda}\alpha^{i+1} - (n-i-2)a_{i,2}\alpha^{i+2} - \cdots - a_{i,n-i-1}\alpha^{n-1}\right\} -$$
$$- (i+1)\mu\left\{\alpha^{i+1} - (n-i-2)\frac{\mu}{\lambda}\alpha^{i+2} - (n-i-3)a_{i+1,2}\alpha^{i+3} - \cdots - a_{i+1,n-i-2}\alpha^{n-1}\right\} =$$

$$= \lambda\alpha^{i-1} - (n-i)\mu\alpha^{i} - (n-i-1)\left\{(\lambda+u+i\mu)\frac{\mu}{\lambda} - \mu\right\}\alpha^{i+1} -$$

$$- (n-i-2)\left\{(\lambda+u+i\mu)a_{i,2} - (i+1)\mu\cdot\frac{\mu}{\lambda}\right\}\alpha^{i+2} -$$

$$- (n-i-3)\{(\lambda+u+i\mu)a_{i,3} - (i+1)\mu a_{i+1,2}\}\alpha^{i+3} - \cdots -$$

$$- 2\{(\lambda+u+i\mu)a_{i,n-i-2} - (i+1)\mu a_{i+1,n-i-3}\}\alpha^{n-2} -$$

$$- \{(\lambda+u+i\mu)a_{i,n-i-1} - (i+1)\mu a_{i+1,n-i-2}\}\alpha^{n-1}.$$

比較 $\varphi^*_{i-1}(n-1)$ 与 $\varphi^*_{i-1}(n)$ 的系数，立得我們的結論。

我們現在回来証明我們的定理。既然 $\alpha^j(j \leqslant n-2)$ 在 $\varphi^*_i(n)$ 中之系数与 α^j_i 在 $\varphi^*_i(n-1)$ 中之系数除前面之因子 $n-1-j$ 改为 $n-2-j$ 外，余皆相同，故由归納法假設，卽得

$$\sum_{i=0}^{n-2}\varphi^*_i(n) = \sum_{i=0}^{n-3}\varphi^*_i + \varphi^*_{n-2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-3}\alpha^i - \frac{\mu}{\lambda}\alpha\sum_{j=0}^{n-3}(n-1-j)\alpha^j\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\lambda^{-i}(u+\mu)\cdots(u+i\mu) +$$

$$+ \alpha^{n-2} - C(n)\alpha^{n-1}.$$

欲决定 $C(n)$，我們只須注意，根据我們所規定的化簡方法及 (7)，$\varphi^*_i(n)$ $(i \leqslant n-3)$ 中 α^{n-1} 之系数乃系由 $A_{n-2} = \frac{\mu}{\lambda}$ 及 $A_{n-3} = \frac{\mu}{\lambda^2}(u+(n-2)\mu)$ 然后根据巡迴公式 (1) 而得出之 A_i。由引理 3，卽得

$$C(n) = \frac{\mu}{\lambda}\sum_{i=0}^{n-2}\binom{n-2}{i}\lambda^{-i}(u+\mu)\cdots(u+i\mu).$$

将此代入上式，立得我們的定理。

定理 2. 当 $k \geqslant n$ 时，方程組

$$\begin{cases} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) - \mu p_1(t), \\ p_k'(t) = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t), \quad 0 < k < n, \\ p_k'(t) = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + n\mu)p_k(t) + n\mu p_{k+1}(t), \quad k \geqslant n, \\ \sum_{i=0}^{\infty} p_i(t) = 1, \quad 0 \leqslant p_i(t) \leqslant 1 \end{cases} \tag{8}$$

之解答 $p_k(t)$ 之拉氏变换 $p_k^* = p_k^*(u)$ 必为

$$p_k^*(u) = \frac{\alpha^k}{u\varphi(u)},$$

于此，α 为

$$n\mu x^2 - (\lambda + u + n\mu)x + \lambda = 0 \tag{5}$$

之二根中絕对值为最小者（唯一确定），

$$\varphi(u) = \frac{1}{1-\alpha} + \frac{\mu}{\lambda}\alpha\sum_{j=0}^{n-2}(n-1-j)\alpha^j\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\lambda^{-i}(u+\mu)\cdots(u+i\mu).$$

証. 作 (8) 之拉氏变换，立得（为簡单起見，設初始条件为 $p_0(0) = 1$，$p_k(0) = 0$，

$k > 0$)

$$(9)\quad \begin{cases} (u+\lambda)p_0^*(u) - \mu p_1^*(u) = 1, \\ \lambda p_{k-1}^* - (\lambda + u + k\mu)p_k^* + (k+1)\mu p_{k+1}^* = 0, \quad 0 < k < n, \\ \lambda p_{k-1}^* - (\lambda + u + n\mu)p_k^* + n\mu p_{k+1}^* = 0, \quad k \geqslant n, \\ \sum_{i=0}^{\infty} p_i^* = \frac{1}{u}. \end{cases}$$

当 $k \geqslant n$ 时，p_k^* 满足差分方程

$$\lambda p_{k-1}^* - (\lambda + u + n\mu)p_k^* + n\mu p_{k+1}^* = 0.$$

而由差分方程之初等理論，p_k^* 必为

$$(10)\quad p_k^* = C\alpha^k + D\beta^k$$

之形式，于此，C, D 与 k 无关，α, β 为 (5) 之二根. 易証（参看[2]或[5]）(5) 在单位圓内有一根且恰有一根. 将(10)代入(9)，不难看出，$p_k^*(k \leqslant n-1)$ 必为 α 与 β 之多項式（以 u 之多項式为系数）. 另一方面，当 $u > 0$ 时，

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i^* = \frac{1}{u}$$

收斂. 故必 $D = 0$.

欲明 $C = \dfrac{1}{u\varphi(u)}$，我們只須注意，經 (10) 及 (9) 所得出之 $p_k^*(0 \leqslant k < n-1)$ 皆必有公因子 C，此由(9)立可看出. 由是，根据定理 1 及(9)中之最后一等式，即得

$$\frac{1}{u} = \sum_{i=0}^{\infty} p_i^* = \sum_{i=0}^{n-2} p_i^* + C(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots) =$$

$$= C\left\{\sum_{i=0}^{n-2} \varphi_i^* + \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots\right\} =$$

$$= C\left\{\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\mu}{\lambda}\alpha \sum_{j=0}^{n-2} (n-1-j)\alpha^j \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \lambda^{-i}(u+\mu)\cdots(u+i\mu)\right\}.$$

此即所需之結果.

推論 1. 当 $k \geqslant n-1$ 时，

$$p_k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{ut}\alpha^k}{\mu\varphi(u)}\, du, \quad (c > 0).$$

定理 3. 若 $\varphi(u) = 0$ 无純虛根，則

$$(11)\quad \lim_{t\to\infty} p_k(t) = p_k$$

存在.

証. 显而易見，欲証明(11)存在，只須証明

$$\lim_{t\to\infty} p_{n-1}(t) \text{ 和 } \lim_{t\to\infty} p_n(t)$$

存在即可. 由定义，經部分积分，我們有

$$p_k'^*(u) = \int_0^{\infty} e^{-ut} p_k'(t)\, dt = \frac{\alpha^k}{\varphi(u)}.$$

若 $\varphi(u)=0$ 在虚軸上无零点，則因其系 u 之一多項式，故引理 1 中之諸条件皆滿足 $(a=0, n=1)$. 由是卽得

$$p_k'(t)=O(t^{-1}),\quad t\to\infty.$$

由引理 2 ,卽得 $(\gamma=0)$

$$p_k(t)-p_k(0)=\int_0^t p_k'(\tau)d\tau\sim C,\quad t\to\infty.$$

推論 2. 当 $n=1,2,3$ 时,极限

$$\lim_{t\to\infty} p_k(t)$$

存在.

証. 当 $n=1,2,3$ 时,易証 $\varphi(u)=0$ 无純虚根.

参　考　文　献

[1] Ledermann, W., and Reuter, G. E. H. "Spectral theory for the differential equations of simple birth and death process, *Phil. Trans.*, *A*, **246** (1954), 321—369.

[2] Bailey, N. T. J., A continuous time treatment of a simple queue using generating functions, *J. R. Statist. Soc.*, *B*, **16** (1954), 288—291.

[3] Champernowne, D. G., A elementary method of solution of the queuing problem with a simple server and constant parameters, *J. R. Statist. Soc.*, *B*, **18** (1956), 125—128.

[4] Clarke, A. B., A waiting line process of Markov type, *Ann. Math. Statist.*, **27** (1956), 452—459.

[5] Conolly, B. W., A. difference equation technique applied to the simple queue, *J. R. Statist. Soc.*, *B*, **20** (1958), 165—167.

[6] Хинчин, А. Я., 公用事业理論的数学方法,科学出版社 (1958), 张里千、殷湧泉譯.

[7] Erlang, A. K., *The Life and Works of*, The Copenhagen Telephone Co., 1948.

[8] Fry, T. C., *Probability and its engineering uses*, Van Nostrand Co., 1928.

[9] Колмогоров, А. Н., Sur le probléme d'attende, *Мат. сборн.*, **38** (1931), 101—106.

[10] Feller, W., *Introduction to probability theory and its applications*, **1** (1957), 2nd ed., John Wiley and Sons, Inc.

[11] Doetsch, G., *Handbuch der Laplace-Transformation, Bd. I*, Verlag Birkhäuser Basel, 1950.

ON THE PROBLEM *M/M/n* IN THE THEORY OF QUEUES

M. I. Yüh
(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

Abstract

As usual, we use $M/M/n$ to denote such a queuing process: the arrival and service time are assumed negative exponentially distributed with means λ^{-1} and μ^{-1} respectively, the number of servers is n. Let $p_k(t)$ be the chance that at time t there are k customers present including those being served. In this paper we prove that

Theorem 1. For $k \geqslant n$, we have

$$p_k(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{ut}\alpha^k}{u\varphi(u)}\,du, \quad (c > 0),$$

where α is the root of

$$n\mu x^2 - (\lambda + u + n\mu)x + \lambda = 0$$

with minimum absolutely value, and

$$\varphi(u) = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\mu}{\lambda}\alpha\sum_{j=0}^{n-2}(n-1-j)\alpha^j\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\lambda^{-i}(u+\mu)\cdots(u+i\mu).$$

Theorem 2. For $n = 1, 2$ and 3, the limits

$$\lim_{t\to\infty} p_k(t) \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

exist.

数学学报第九卷总目录

(1959年)

第 1 期

第 2 期

第 3 期

第 4 期

ACTA MATHEMATICA SINICA, VOL. 9, 1959

CONTENTS

No. 1

No. 2

No. 3

No. 4

数学学报第九卷(1959年)

作 者 索 引

ACTA MATHEMATICA SINICA

Vol. 9, 1959

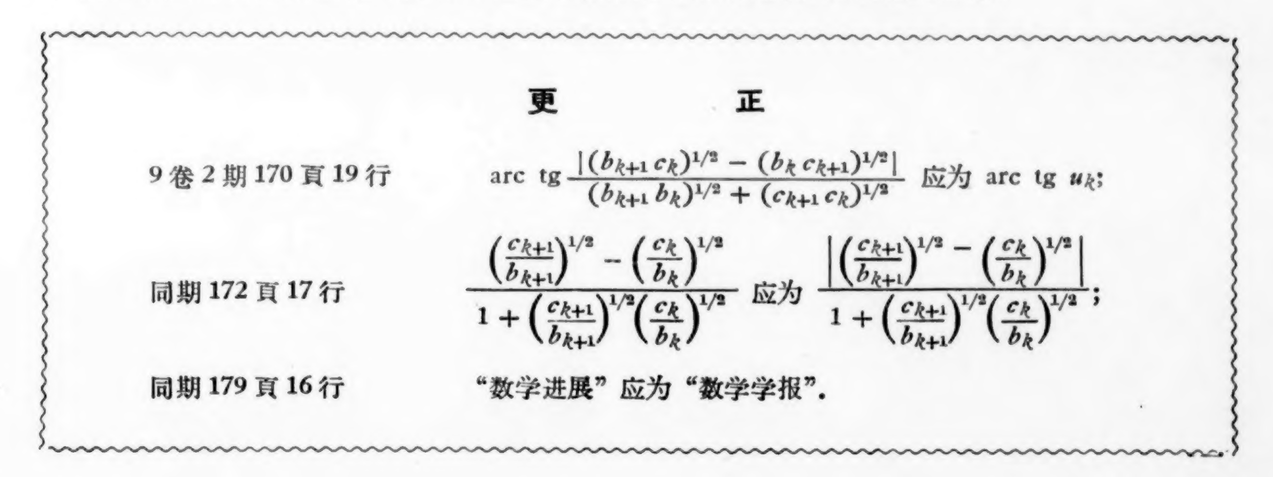
AUTHOR INDEX



数学学报征稿簡約

1. 本学报仅刊載具有創作性的論文.
2. 論文概用中文(語体)并附外文或外文摘要.
3. 外文請用打字机間行打就,公式则以手写为宜.
4. 插图請用白紙黑墨精繪.
5. 参考文献一律附在文后,并請按下列格式书写:

   Шнирельман, Л. Г., Об аддитивных свойствах чисел. *Ростов н/Д, Изб. Донск. политехн. ин-та.* **14** (1930), 8—32.
6. 凡經本学报发表的稿件,須先經专家审查,审查人不限于本学报的編輯委員.
7. 本学报編輯委員会認为必要时,得請求作者将稿件加以修改或精簡.
8. 稿件刊載的順序一般地以收到先后为原則.
9. 作者有負責精校印稿的义务.
10. 凡寄投本学报的稿件請作者自留底稿.
11. 稿件上請註明作者通信处.
12. 凡經本学报登載的稿件酌送稿費,并一律代印单行本50份,費用在稿費中扣除.
13. 凡不登載的稿件,当寄还作者.
14. 稿件請掛号寄北京西郊中关村中国科学院数学研究所数学学报編委会收.



更　　正

9卷2期170頁19行　　arc tg $\frac{|(b_{k+1}c_k)^{1/2} - (b_k c_{k+1})^{1/2}|}{(b_{k+1}b_k)^{1/2} + (c_{k+1}c_k)^{1/2}}$ 应为 arc tg u_k;

同期172頁17行　　$\frac{\left(\frac{c_{k+1}}{b_{k+1}}\right)^{1/2} - \left(\frac{c_k}{b_k}\right)^{1/2}}{1 + \left(\frac{c_{k+1}}{b_{k+1}}\right)^{1/2}\left(\frac{c_k}{b_k}\right)^{1/2}}$ 应为 $\frac{\left|\left(\frac{c_{k+1}}{b_{k+1}}\right)^{1/2} - \left(\frac{c_k}{b_k}\right)^{1/2}\right|}{1 + \left(\frac{c_{k+1}}{b_{k+1}}\right)^{1/2}\left(\frac{c_k}{b_k}\right)^{1/2}}$;

同期179頁16行　　"数学进展" 应为 "数学学报".

数 学 学 报 第 9 卷 第 4 期

Acta Mathematica Sinica, Vol. 9, No. 4

（季 刊）

編 輯 者	中 国 数 学 会
出 版 者	科 学 出 版 社
印 刷 者	中国科学院印刷厂
总发行处	北 京 市 邮 局
訂 购 处	全 国 各 地 邮 电 局
代訂另售处	全国各地新华书店 科学出版社各地門市部

（京）道：1—1,010 报：1—2,220 1959年12月出版

本期定价：道林本 2.60 元 报紙本 1.80 元

本刊代号：道 2—50 报 2—50